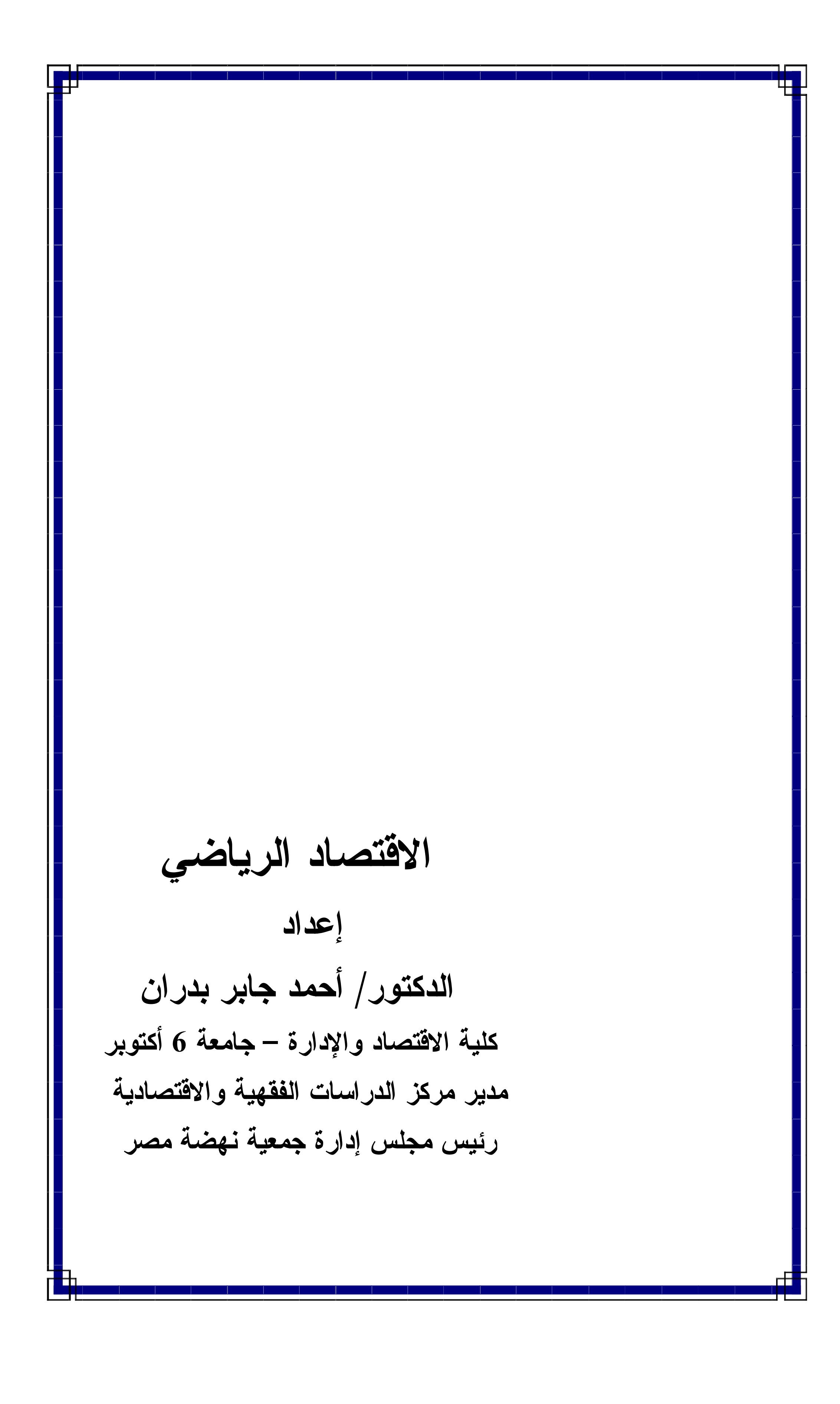


الاقتصاد الرياضي

إعداد

الدكتور/ أحمد جابر بدران

كلية الاقتصاد والإدارة – جامعة 6 أكتوبر

مدير مركز الدراسات الفقهية والاقتصادية

رئيس مجلس إدارة جمعية نهضة مصر

بسم الله الرحمن الرحيم

أحمد جابر بدران

عنوان المصنف: الاقتصاد الرياضي

القسم: الاقتصاد الرياضي

المؤلف: أحمد جابر بدران

اسم الناشر: المؤلف

ط1- القاهرة - 1434هـ - 2013/2014م

مج1 17 × 24

الإخراج الفني: منى حامد

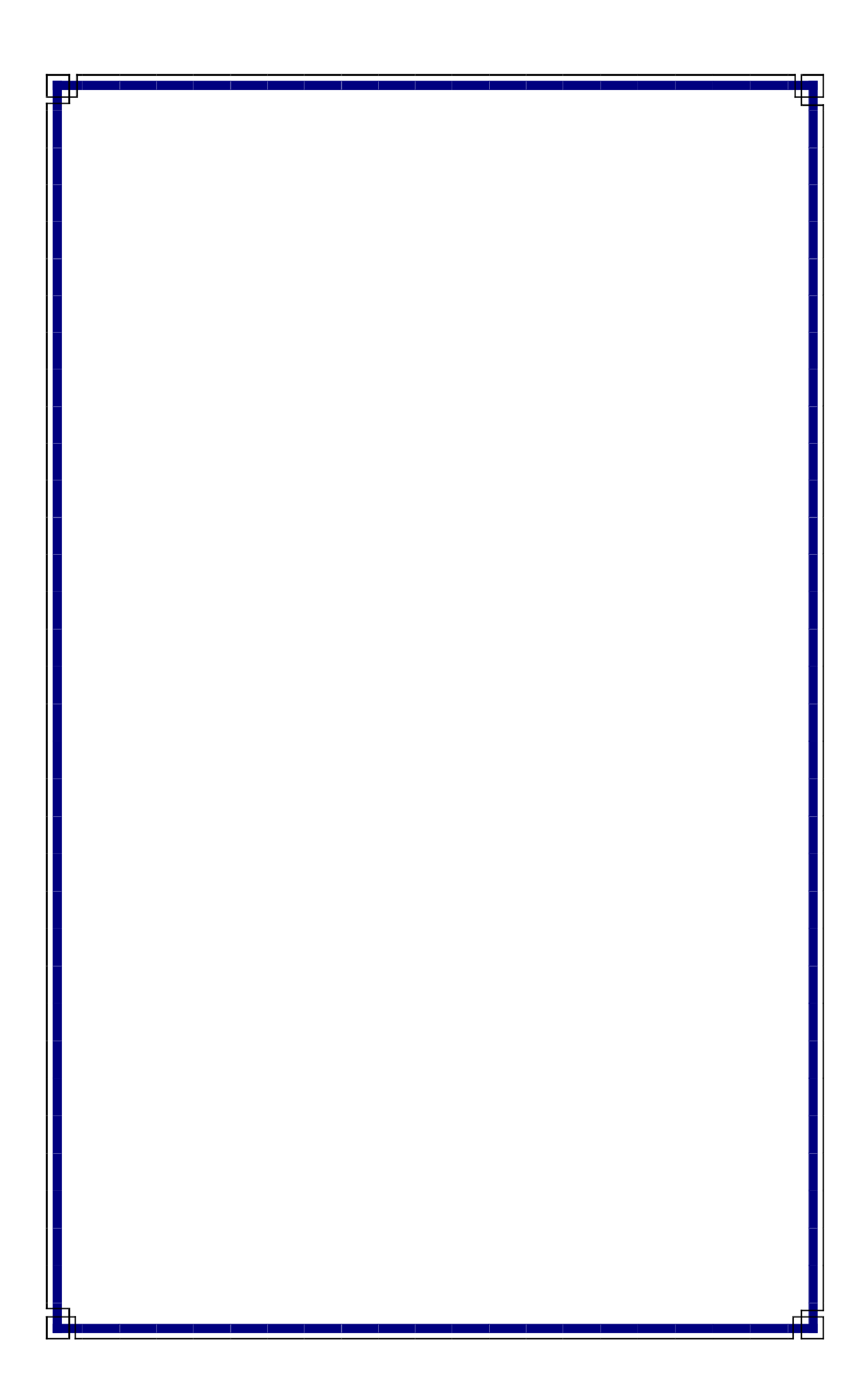
عنوان الناشر: 7 ش نوال متفرع من شارع وزارة الزراعة

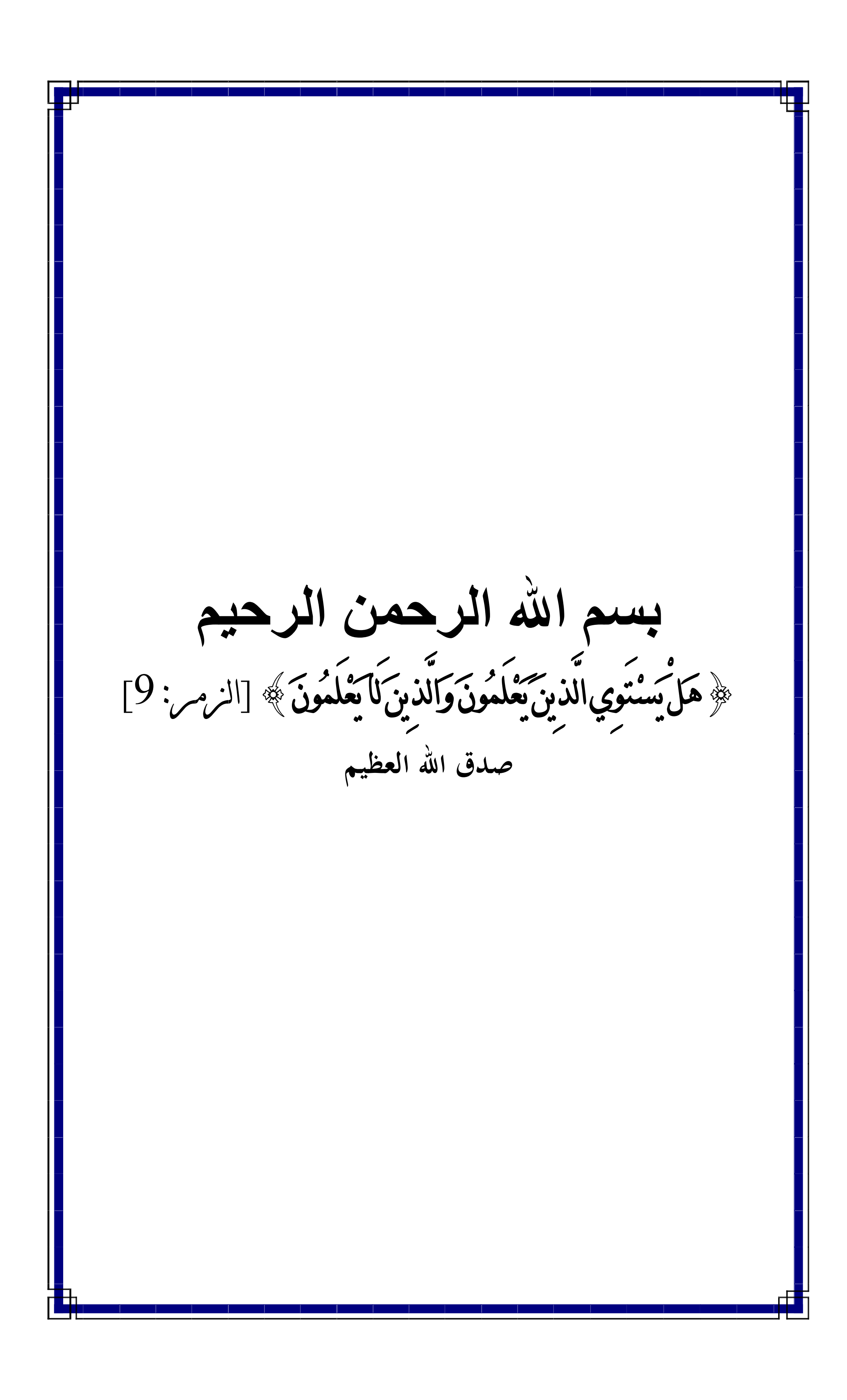
العجوزة- الجيزة

تليفاكس: 37605305 (202) 01111444141- 01001444141

E-mail : CLES1996@yahoo.com

E- mail: D_AhmedGaber@yahoo.com





بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ هَلْ يَسْتَوِي الَّذِينَ يَعْلَمُونَ وَالَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ ﴾ [الزمر: 9]

صدق الله العظيم

الاقتصاد الرياضي

(Mathematical Economics)

مقدمة: يعتمد الاقتصاد كمادة أكاديمية على الأساليب الرياضية إلى جانب اعتماده على الجوانب الأدبية ويتم اعتماده على الأساليب الرياضية والكمية لغرض تحليل الاقتصاد بدقة أو تحليل مناطق بعينها داخل الاقتصاد. والاقتصاد الرياضي مصطلح يطلق على تطبيق المناهج الرياضية لشرح، وتفسير النظرية الاقتصادية بطرق رياضية، إذ يقوم بصياغة مفردات النظرية الاقتصادية الجزئية والكلية بأسلوب رياضي معبراً عنها بصيغ دالية، ويدرس الاقتصاد الرياضي العلاقات بين مختلف المتغيرات الاقتصادية ليس بالوصف كما هو الحال في الاقتصاد الوصفي التقليدي وإنما باعتماد الدوال والعلاقات والرموز الرياضية، ولا يعتبر الاقتصاد الرياضي فرعاً من فروع علم الاقتصاد كالاقتصاد الجزئي أو الكلي أو الاقتصاد القطاعي (زراعي، صناعي، تجاري، ... إلخ) أو من السياسات الاقتصادية كالسياسة المالية أو النقدية وإنما هو منهج أو أداة للتحليل الاقتصادي، فهو يفترض علاقة دقيقة ومضبوطة بين المتغيرات الاقتصادية، ويتبع الاقتصاد الرياضي الطريق العلمي الذي يبدأ بجمع البيانات والحقائق وتصييغ الفروض واختبارها، وعليه يمثل الاقتصاد الرياضي طرقاً تكتيكية في تحليل مسار العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية، وأن معظم طرق التحليل الاقتصادي تختزل بالتحليل الرياضي، فهو يوضح هذه العلاقات بأسلوب كمي (منتظم ومنطقي) كالعلاقة بين الاستثمار والدخل الكلفة وإرتفاع الأسعار والطلب النقدي والدخل وسعر الفائدة والإدخار والدخل وغيرها.

ويطلق الاقتصاد الرياضي على مجموعة من القوانين والنظريات والأدوات المستعملة في تمثيل النظرية الاقتصادية رياضياً بهدف دراسة ظاهرة ما أو تحليل لمشكلة قائمة بإعتماد تصييغ رياضي معين.

كما يطلق مصطلح "اقتصاد رياضي" على تطبيق المناهج الرياضية للشرح وتفسير النظرية الاقتصادية بطرق رياضية أو لحل المسائل الاقتصادية المطروحـــة. ويستخدم الاقتصاد الرياضي أساليب تحليل، المحددات والمعادلات الآنية والتفاضل والتكامل، ومناهج المصفوفات الجبرية. وأشاد الكتّاب الاقتصاديون بالفوائد الكبيرة لهذا الأسلوب والمتمثلة بإتاحة صياغة واشتقاق مفتـــاح العلاقـــات في النمـــوذج الاقتصادي بوضوح، وصرامة، وبساطة. وقد حدد (بول سأمويلسون) في كتابـــه "أساسيات التحليل الاقتصادي" عام 1947، الصيغ الرياضية العامـــة في عـــدة مجالات اقتصادية والتي عن طريقها يتم تحليل المسائل والقضايا الاقتصادية بطريقـــة كميه يمكن ان يعبر عنها بنظريات ومعادلات كما فعل بعض علمـــاء الاقتـــصاد الحائزين على جوائز نوبل في الاقتصاد كالعالم جون فوربس ناس عـــن نظريتـــه " نظرية التوازن " وهى اعتمادها الاساسى جانبا رياضيا بحت.

النماذج الاقتصادية الرياضية تعتمد على معايير عديدة

علاقة النموذج مع الزمن:

أولاً -نماذج ساكنة static models

ثانياً -نماذج حركية dynamic models

أولاً: النماذج الساكنة static models لاتهتم بالزمن يعـــنى كـــم يستغرق من الزمن وكيف تتم عملية التعديل هل عند توا زن معين إذا حدث تغير فى أى من المتغيرات المستقلة انتقلنا إلى توازن فكيف انتقلنا إلى هذا التوازن حيـــث مررنا بعدة نقاط أخرى بالنسبة للنماذج الساكنة نقارن عندما نتكلم عن النماذج الساكنة أو تحليل الساكن المقارن نقارن نقطة التوازن الثانى بنقطة التـــوازن الأولى فقط دون الدخول فى تفاصيل أخرى ومتى وصلنا إلى هذه النقطة والزمن الـــذى استغرق من أجل الوصول إلى هذا، ولهذا فالنماذج الساكنة تـــستخدم فى هـــذه

النماذج للتركيز على معدل التغير فى المتغير التابع (التفاضل) هذه هـــى النمـــاذج الساكنة.

ثانياً: النماذج الحركية : Dynamic models تهتم بالزمن كـــثيراً ومتى نصل إلى نقطة توازنية أخرى، وكيف وصلنا إليها هذا ما يسمى بالنمـــاذج الحركية ، بالاضافة إلى ذلك نستخدم هنا أسلوب التكامـــل فى حالـــة النمـــاذج الحركية .

1-نماذج وحيدة المعادلة Single equations models ويتكون النموذج من معادلة واحدة

2-نماذج متعددة المعادلات Multiple equations models

أى أكثر من معادلة

أ- نماذج متعددة المعادلات لكن كل معادلة مستقلة عن الأخرى

ب- نماذج آنية بمعنى أن المعادلات يعتمد بعضها على الآخر.

درجة شمولية النموذج

النموذج الكلى Macro model: يكون نموذج شامل الاقتـــصاد ككل:

النموذج الجزئى Micro model :يكون خاص بجزئية معينة قد يكون خاص مثلاً بسوق مثلاً بسلوك المستهلك سلوك المنتج وما إلى ذلك.

وفيما يلي محتويات منهج الاقتصاد الرياضي:

الفصل الأول: الأدوات الرياضية المستخدمة في الاقتصاد الرياضي

1-المحدادت والمعادلات الأنية

2-حساب التفاضل والتكامل

3-المصفوفات والمعادلات الخطية.

الفصل الثاني: توازن السوق في حالة المنافسة الكاملة

الفصل الثالث: تحليل جانب العرض: نظرية الانتاج

الفصل الرابع: دوال التكاليف

الفصل الخامس: تحليل جانب الطلب: نظرية سلوك المستهلك

الفصل السادس: التوازن الاقتصادي العام: نموذج فالراس.

الفصل السابع: تحديد مستوى الدخل القومي والنموذج الكينزي المبسط

الفصل الثامن: نمو الدخل القومي : نموذج هارود ودومار

ويجدر بنا أن نذكر بأننا أعتمدنا في إعداد منهج الاقتصاد الرياضي بصفة أساسية على كتاب "الأسعار وتخصيص الموارد" للاستاذة الدكتورة "هناء خيرالدين"، ومحاضرات في الاقتصاد الرياضي للدكتورة "هناء خيرالدين"، ومذكرة الاقتصاد الرياضي والقياسي والتي قامت بإعدادها الاستاذة "هالة رجب" المدرس المساعد بكلية الاقتصاد والإدارة جامعة 6 أكتوبر والمقدمة لطلبة الدكتوراه بأكاديمية السادات للعلوم الإدارية.

فأتقدم بجزيل الشكر والتقدير للزميلة الفاضلة أ/ هالة رجب ولها كل التقدير وأدعو المولى عز وجل لها بالتوفيق والتقدم والرقي في العلم وأن يرفع المولى عز وجل من علمها لتصل لمرتبة العلماء فهي تستحق كل التقدير والإحترام على مجهوداتها ونبوغ فكرها العلمي. فجزاها الله عنا كل خير

د/ أحمد جابر بدران

كلية الاقتصاد والإدارة – قسم الاقتصاد

مدير مركز الدراسات الفقهية والاقتصادية

رئيس مجلس إدارة جميعة نهضة مصر

أكتوبر 2013

الفصل الأول

الأدوات الرياضية المستخدمة

في الاقتصاد الرياضي

-1-

المحددات والمعادلات الآنية

يحتاج علم الاقتصاد إلى المحددات والمعادلات الآنية التي تساعد في حل مجموعة من المعادلات المتعددة المتغيرات بطريقة تساعد على حل النماذج الاقتصادية الرياضية عن طريق إيجاد حل لهذه النماذج الاقتصادية الرياضية يضمن فهم العلاقات بين أكثر من تغير في آن واحد ويمكن كتابة هذه المعادلات بالصورة الآنية حيث أن n عدد من المعادلات في ذات العدد n من المتغيرات في الصورة:

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1$$
$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n = b_n$$

حيث تشير $\mathbf{x_j}$ $(j = 1,2, \ldots, n)$، إلى المتغيرات المختلفة في المعادلات.

ويمكن حل هذه المعادلات لإيجاد قيم x_j $(j = 1,2, \ldots, n)$ باحدى طرق ثلاث:

-طريقة التعويض: وهي طريقة مألوفة ولن نتناولها بالبحث هنا إذ أننا نفترض أن الطالب ملم بها.

-طريقة المصفوفات.

-طريقة المحددات.

أولاً: شروط وجود حل وحيد لمجموعة من المعادلات الآنية:

يجب أن تتوافر ثلاثة شروط حتى يكون لمجموعة من المعادلات الخطية الآنية حل وحيد – وهذه الشروط هي:

-اتساق المعادلات.

-استقلال المعادلات.

-تساوى عدد المعادلات مع عدد المتغيرات.

1- اتساق المعادلات: تكون المعادلات متسقة أن لم تتضمن معلومات متضاربة – وتنشأ مشكلة عدم الاتساق أساسا إذا كانت نسبة معاملات معادلة إلى معاملات معادلة أخرى في النموذج واحدة ولكن نسبة الثابتين مختلفة.

مثال:

نفترض أن لدينا المعادلتين:

$$2x_1 + 3x_2 = 5$$
$$4x_1 + 6x_2 = 8$$

يمكن القول أن المعادلتين السابقتين غير متسقتين إذ أن الأولى تقرر أن: $2x_1 + 3x_2 = 5$ وتتضمن الثانية أن $2x_1 + 3x_2 = 4$ ومن الواضح أنه لا يمكن أن يساوي مقدار ما قيمتين مختلفتين 4 و 5.

تمثل هندسيا معادلتان غير متسقتين بخطين متوازين، وبالتالي لا يتقابلان ويتبع ذلك أن المعادلتين لا حل لهما.

2- استقلال المعادلات: إذا كانت معادلات معادلة من المعادلات مضاعف ثابت لمعاملات معادلة أخرى، يقال أن المعادلتين غير مستقلتين، إذ أنهما تتضمنان ذات المعلومات. ويمكن تمثيلهما هندسيا بخطين متطابقين وبالتالي يتلاقيان في عدد لا نهائي من النقط، أي أن عدد حلول المعادلتين لا نهائي.

مثال:

إذا كان لدينا:

$$2\,x_1 + 3\,x_2 = 5$$
$$4\,x_1 + 6\,x_2 = 10$$

فإن المعادلة الثانية ليست إلا المعادلة الأولى مضروبة في اثـــنين. وبالتـــالي يكون لدينا في الواقع معادلة واحـــدة $2\,x_1 + 3\,x_2 = 5$ لتحديـــد قـــيمتي متغيرين- ويمكن، باختيار أي قيمة لأحد المتغيرين، بصورة تحكمية، إيجاد القيمـــة المقابلة للمتغير الآخر، وبالتالي يكون لهذه المعادلة عدد لا نهائي من الحلول.

3- تساوى عدد المعادلات مع عدد المتغيرات: إذا كان عدد المعادلات مساويا لعدد المتغيرات، وكانت المعادلات متسقة ومستقلة، يمكن إيجاد حل لهـــا، وهذا الحل وحيد.

مثال:

$$3\,x_1 - 5\,x_2 = 11$$
$$x_1 + 2\,x_2 = 11$$

ويمكن حل المعادلتين (بطريقة التعويض مثلا) فنجد أن:

$X_2 = 2$ $\qquad x_1 = 7$

ثانياً: المحددات وخصائصها:

إذا عدنا إلى مجموعة المعاجلات الآنية السابق الإشارة إليها وهي:

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1$$
$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad .. \quad \ldots$$
$$A_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n = b_n$$

يمكن ترتيب معاملاتها a_{ij} في صورة مربع أبعاده $n \times n$ (حيث n عدد المتغيرات وعدد المعادلات)، ويطلق على المقدار المشتق وفقا لقواعد معينة من هذه المجموعة من الأرقام المرتبة في صورة مربع اسم محدد المعاملات A، ويرمز للمحدد بالطريقة التالية:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (٢-٢)$$

أمثلة:

فمحدد معاملات المعادلتين التاليتين:

$$3x_1 - 5x_2 = 11$$
$$x_1 + 2x_2 = 11$$

هو

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

كما أن محدد معاملات المعادلات:

$$x_1 + x_2 + x_2 = 1$$
$$x_1 + \quad + x_3 = 4$$
$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 7$$

هو

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

نرمز لعناصر محدد المعاملات A بالرمز a_{ij} حيث I يرمز لرقم الصف وj يرمز لرقم العمود في المحدد. فمثلا a_{57} تشير إلى عنصر الصف الخامس والعمـــود السابع.

وفيما يلي، نذكر بعض التعريفات الهامة:

1- المحيددات Minors: يطلق اسم المحيدد على المحدد الذي نحصل عليه من المحدد الأصلي A باستبعاد أي عدد من صفوفه وعدد مماثل من أعمدته.

فمن محيددات المحدد A:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

وهو المحيدد الذى نحصل عليه باستبعاد الـ n − 2 صف والـ n − 2 عمود الأخيرين من المحدد A

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2}, \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

هو المحيدد الذى نحصل علية باستبعاد الصف الأخير والعمود الأخير من المحدد الأصلى .

2- المرافقات Co –factors: يطلق اسم المرافق أو المحدد المرافق C_{ij} للعنصر a_{ij} على المحيدد الذي نحصل عليه باستبعاد الصف I والعمود j من المحدد الأصلي الذي يقع فيهما العنصر a_{ij} وذلك بعد وضع الإشارة الجبرية الملائمة أمام هذا المحيدد – وتتلخص قاعدة الإشارة فيما يلي: إذا كان j + i رقم زوجي، يضرب المحيدر في 1 للحصول على المرافق، وإذا كان j + i رقم فردي، يضرب المحيدر في (-1) فإذا عدنا إلى المحدد الأصلي نجد أن:

C_{11} = المحيدر الناتج عن استبعاد الصف الأول والعمود الأول.

C_{57} = المحيدر الناتج عن استبعاد الصف الخامس والعمود السابع.

C_{78} = (–1) (المحيدر الناتج عن استبعاد الصف السابع والعمود الثامن).

C_{21} (–1) (المحيدر الناتج عن استبعاد الصف الثاني والعمود الأول).

وهكذا . . . . .

3- حساب قيمة المحدد: باستخدام تعريف المرافقات، يمكن حساب قيمة المحدد:

فإذا كان لدينا محدد أبعاده 2×2 فان:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}$$

مثال:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14$$

والقاعدة العامة لحساب قيمة أي محدد A هي أن:

$$A = a_{i1}\ C_{i1} + a_{i2}\ C_{i2} + \ldots + a_{in}\ C_{in} \quad (3\text{-}2)$$

حيث C_{ij} المحدد المرافق للعنصر a_{ij}

لاحظ أنه يمكن حساب قيمة المحدد A بفكه بدلالة أي صف أو أي عمود من أعمدته. فمثلا إذا استخدمنا العمود الأول بدلا من الصف الأول نجد أن:

$$(3\text{-}2)\quad A = a_{1j}\ C_{1j} + a_{2j}\ C_{2j} + \ldots + a_{nj}\ C_{nj}$$

4- خصائص المحددات: للمحددات خصائص نجملها (بدون إثبات) فيما يلي:

1-إذا بدلنا جميع صفوف المحدد محل أعمدته وأعمدته محل صفوفه فإن قيمة المحدد لا تتغير – أي أن:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

مثال :

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

2-إبدال مكان أي عمود (أو صف) بمكان عمود (أو صف) آخر يغــير الإشارة الجبرية للمحدد.

مثال:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

إذا وضعنا العمود الأول محل الثانى والثانى محل الأول نحصل على

$$\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

3-إذا تساوت مكونات أي عمودين (أو صفين) فإن قيمة المحدد تــصبح صفراً.

مثال:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

4-إذا ضرب أي صف I (أو عمود j) من المحدد في k، فإن قيمة المحدد تصبح (باستخدام (2-3) وبفك المحدد بدلالة الصف i).

$$A = k_{ai1}\ C_{i1} + ka_{i2}\ C_{i2} + \dots + ka_{in}\ C_{in} = {}_{K}A$$

أي أن كل قيمة المحدد تضرب في k.

مثال: إذا ضربنا أي صف (وليكن الصف الثاني) من المحدد التالي:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

فى ٤ ، نحصل على :

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 44 = 4 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5-إذا ضربت جميع عناصر المحدد في رقم ثابت k، فتصبح قيمة المحدد A مساوية إلى $k^n A$ (حيث n عدد صفوف أو أعمدة المحدد).

مثال : إذا ضربنا جميع حدود المحدد $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ فى ٤ نحصل على

$$\begin{vmatrix} 12 & -20 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 96 + 80 = 176 = 16 \times 11 = 4^2 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

6-إذا ضرب أي صف (أو عمود) في المرافقات المقابلة لصف (أو عمود آخر، فإن النتيجة تكون صفراً – أي أن:

$$a_{i1}\ C_{j1} + a_{i2}\ C_{j2} + \dots + a_{in}\ C_{jn} = 0 \qquad i \neq j$$

مثال : إذا ضربنا الصف الأول من المحدد $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ فى المرافقات المقابلة للصف الثانى نحصل على :

$$3\ (5) - 5\ (3) = 0$$

7-باستخدام الخاصيتين 4 و6 يمكن أن نتبين أن جمع مضاعف أحد الصفوف (أو الأعمدة) إلى صف (أو عمود) آخر لا يغير قيمة المحدد.

فبضرب الصف j في k وجمعه على I مثلا، وبحساب قيمة المحدد بدلالة الصف I نحصل على:

$$A^{**} = (a_{i1} + ka_{j1})\, C_{i1} + (a_{i2} + ka_{j2})\, C_{i2} + \dots + (a_{in} + ka_{jn})\, C_{in}$$

$$= a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in} + k(a_{j1}\, C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \dots + a_{jn}\, C_{in})$$

$$= a_{i1}\, C_{i1} + a_{i2}\, C_{i2} + \dots + a_{in}\, C_{in} = A$$

مثال:

بضرب الصف الثاني من المحدد $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ في ٢ وجمعه على الصف الأول نحصل على :

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 1 = 11 = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ثالثاً :طريقة المحددات في حل المعادلات الآنية: قاعدة كرامر :Cramer's Rule

تقرر قاعدة كرامر أن قيمة أي متغير x_j ($j = 1,2, \dots, n$) تساوى النسبة بين محددين: محدد المقام هو محدد المعاملات ومحدد البسط هو المحدد الذي نحصل عليه من محدد المعاملات، بعد إحلال عمود الثوابت b_i ($i=1,2,\dots,n$) محل العمود رقم j (لاحظ أن العمود رقم j هو عمود معاملات المتغير x_j)

ويمكن تبيان ذلك باستخدام الخاصتين 4 و 7 للمحددات. فبضرب العمود الأول لمحدد المعاملات A في x_1 وباستخدام الخاصية 4 نجد أن:

$$
A = \begin{vmatrix} a_{11}\, x_1 & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, x_1 & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}\, x_1 & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}
$$

والآن نطبق الخاصية 7 ، فنضرب العمود الثاني في x_2 ونجمعه على العمود الأول وبالتالي لا تتغير قيمة المحدد:

$$
x_1\, A = \begin{vmatrix} a_{11}\, x_1 + a_{12} x_2 & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots \cdots \cdots & \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2} x_2 & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}
$$

يضرب كل عمود j في x_j ($j = 3, \ \dots n$) ويجمعـــه علـــى المحـــدد السابق، لا تتغير قيمة المحدد (خاصية 7)، ونحصل في النهاية على

$$
x_1\, A = \begin{vmatrix} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \dots + a_{1n}\, x_n & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \dots + a_{2n}\, x_n & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots \cdots \cdots & \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \dots + a_{nn}\, x_n & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}
$$

لاحظ الآن أن العمود الأول يساوي عمود الثوابت b_i ($i=1,2,\dots,n$) وذلك من واقع مجموعة المعادلات الآنية رقم (2-1)، وبالمثل فان

$$x_1 A = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_1$$

وبالتالي تكون:

$$X_1 = \frac{A_1}{A}$$

ويمكن تعميم هذه النتيجة بالقول أن:

$$Xj = \frac{A_j}{A} \qquad (1-3)$$

حيث A_j هو المحدد الذي نحصل عليه باحلال عمود الثوابت محل العمود j في محدد المعاملات.

مثال:

أوجد قيمة x_1 ، x_2 باستخدام المحددات ، حيث:

$$3\ x_1 - 5\ x_2 = 11$$
$$x_1 + 2\ x_2 = 11$$

بتطبيق قاعدة كرامر، نجد أن

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -5 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{22 + 55}{6 + 5} = \frac{77}{11} = 7$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \quad \frac{33 - 11}{11} = \frac{22}{11} = 2$$

وهذه هي، بالطبع، نفس النتيجة التي حصلنا عليها من قبل عـــن طريـــق التعويض.

مثال:

إذا كانت

$$3x_1-4x_2=0$$
$$6x_1-8x_2=0$$

فإن محدد المعاملات يساوى الصفر : $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -24+24=0$

وبالتالي، فالمعادلتان ليستا مستقلتين، ويمكن إهمال إحداهما، ولتكن الثانية- فيبقى لنا المعادلة $3x_1-4x_2=0$ لتحديد قيمة x_1 ، x_2 فنحصل منها على: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{4}{3}$ وأي مجموعة من القيم x_1 ، x_2 تحقق المعادلتين طالما أن العلاقة بين x_1 ، x_2 هي 4 إلى 3. ولا يمكن تحديد القيم العددية لكـــل من x_1 ، x_2 إلا باختيار قيمة تحكمية لإحداهما.

تمرينات (1)

1- أوجد حلول لمجموعة المعادلات الآنية التالية باستخدام طريقة المحددات:

(أ)

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1$$
$$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4$$
$$x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5$$

(ب)

$$-3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0$$
$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2$$
$$x_1 - 4x_2 - 13x_3 = 14$$

(حـ)

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$x_1 - 4x_2 - 13x_3 = 0$$
$$-3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0$$

(ى)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0$$
$$4x_1 + 4x_3 = 0$$

2- أثبت أن المعادلتين الآتيتين:

$$-4x_1 + 3x_2 + a x_3 = c$$
$$-5x_1 + 4x_2 + b x_3 = d$$

لهما حل دائما لجميع قيم الثوابت : d ، c ، b ، a

3- إذا كانت:

$$-4x_1 + 2x_2 = a$$
$$5x_1 - 4x_2 = b$$
$$-3x_1 + 2x_2 = c$$

حدد الشروط التي يجب فرضها على قيم a ، b ، c حتى يكـــون لهـــذه المعادلات حل.

مقدمة في حساب التفاضل

يجدر بنا أن نقوم بعملية مراجعة بسيطة في التفاضل والتكامل الذي يعتمد عليه بصورة كبيرة في مادة الاقتصاد الرياضي.

أولاً: الدوال ذات المتغير الواحد:

نقدم فيما يلي لمحة سريعة لأساليب تفاضل الدوال ذات المتغير الواحد، ثم نبحث في طريقة إيجاد القيم العظمة والصغرى لتلك الدوال.

1- المشتقة من الدرجة الأولى: إذا كانت $y = f(X)$ دالة مستمرة، ورمزنا إلى أي تغير في المتغير المستقل X بالرمز $\triangle x$ ، فإن

$$y + \triangle y = f(x + \triangle x)$$

أى أن

$$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x)$$

حيث كما هو واضح يعبر عن التغير في قيمة الدالة المقابل للتغير وبقسمة طرفي المعادلة السابقة على نحصل على:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

وهذه الصيغة تعبر عن متوسط تغير Y بالنسبة لتغير X من X إلى $X + \triangle X$

والآن ، تعرف مشتقة $f(x)$ من الدرجة الأولى بأنها معدل تغير $f(x)$ أو y عندما يؤول $\triangle x$ إلى الصفر – ونرمز لها بالرمز $\frac{dy}{dx}$ أو $f'(x)$ أو $\dot{y}$ أى أن

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \dot{y} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} \qquad (١-١)$$

وتعادل فكرة المشتقة الأولى عند أية نقطة، هندسيا، ميل المماس لهذه النقطة.

2-قواعد تفاضل بعض الدوال ذات المتغير الواحد: بتطبيق تعريف المشتقة الأولى (1-1)، يمكن إثبات بعض القواعد الهامة في تفاضل الدوال – وفيما يلي عرض لهذه القواعد بدون إثبات (يمكن للقارئ محاولة إثباتها كتمرين)

أ-مشتقة الثوابت: إذا كانت الدالة تساوي مقدارا ثابتا، فإن مشتقتها تساوى الصفر، أي أنه إذا كانت $F(x) = c$ حيث c مقدار ثابت، $F`(x)= 0$.

ب-مشتقة الدوال ذات الأس الثابت: إذا كانت $f(x) = x^n$ حيث n ثابت، فإن $F`(x) = nx^{n-1}$، فالقاعدة إذن أن مشتقة الدالة ذات الأس الثابت تساوى حاصل ضرب الأس في المتغير مرفوعا إلى هذا الأس ناقصا واحد.

ج-مشتقة الدالة المضروبة في ثابت: إذا كانت $F(x) = ag(x)$ حيث g دالة في x فإن $F`(x) = ag`(x)$، فالقاعدة أنه إذا كانت الدالة تساوى دالة أخرى مضروبة في ثابت، فإن مشتقتها تساوى الثابت مضروبا في مشتقة الدالة الأخرى.

مثال:

إذا كانت $F(x) = a x^n$ ، فإن $F` (x) = anx^{n-1}$.

د-مشتقة مجموع الدوال: إذا كانت $F(x) = g(x) \pm h(x)$ حيث g و h دالتان في x ، فإن $F`(x) = g` (x) \pm h`(x)$ أي أن مشتقة المجموع الجبري للدوال تساوى المجموع الجبري لمشتقاتها.

مثال:

إذا كانت: $F(x) = 3 x^4 + 5 x^3 – x^2$ فإن

$$F`(X) = I2x^3 + I5 x^2 – 2x$$

هــ-مشتقة حاصل ضرب دالتين: إذا كانـــت $F(x) = g(x).h(x)$ فإن $F`(x) = g`(x).\ h(x) + g(x).\ h`(x)$

أي أن مشتقة حاصل ضرب دالتين تساوي مشتقة الدالة الأولى مـــضروبة في الدالة الثانية زائدا مشتقة الدالة الثانية مضروبة في الدالة الأولى.

مثال :

إذا كانت : $f(x) = 4x^2(3x-2)$ فإن

$$f'(x) = (8x)(3x-2) + (4x^2)(3) = 36x^2 - 16x$$

٦ – مشتقة خارج قسمة دالتين : إذا كانت $f(x)=g(x)/h(x)$، فإن :

$$f'(x) = \frac{g'(x).\ h(x) - g(x).h'(x)}{\{h(x)\}^2}$$

أي أن مشتقة خارج قسمة دالتين تساوي مشتقة البسط مضروبة في المقام ناقصا مشتقة المقام مضروبة في البسط والكل مقسوما على مربع المقام.

مثال :

إذا كانت $f(x) = (3x-2)/4x^2$ ، فان .

$$f'(x) = \frac{3(4x^2) - 8x(3x-2)}{(4x^2)^2} = \frac{-3x+4}{4x^3}$$

و-قاعدة تفاضل دالة الدالة: Function of a function rule:

إذا كانت $F(x) = g(z)$ حيث $z = h(x)$ فـيمكن كتابــة $F(x) = g[h(x)]$، ومـــشتقة هـــذه الدالـــة هـــي: $f`(x) = g`[h(x)].\ H`(x)$.فالقاعدة أنه إذا كان لدينا دالة في دالة لمتغير ما، فإن مشتقة هذه الدالة بالنسبة للمتغير تساوى حاصل ضرب مشتقة الدالة الأولى بالنسبة للدالة الثانية في مـــشتقة الدالة الثانية بالنسبة للمتغير.

مثال:

مثال :

إذا كانت $f(x) = z^2 + 2z + 1$ حيث $z = x^2 - 2$ ، فإن

$$f'(x) = \frac{d}{dz}(z^2 + 2z + 1) \cdot \frac{dz}{dx} = (2z+2)(2x)$$

وبالتعويض عن Z بقيمتها، نحصل على

$$F'(x) = 4^{x3} - 4$$

ز-مشتقة الدالة اللوغاريتيمة: إذا كانت $f(x) = \log x$ ، فإن

$$F'(x) = \frac{1}{X}$$

ج-مشتقة الدالة الاسية: إذا كان $f(x) = e^{ax}$ ، فإن $f'(x) = ae^{ax}$

ت-قاعدة مقلوب الدالة: Inverse function rule

إذا كانت $y = f(x)$ دالة مستمرة وذات قيمة مفردة ولها مقلوب $x = g(y)$ ،

فإن $f'(x) = 1/g'(y)$ أو $\frac{dy}{dx} = 1/\frac{dx}{dy}$ ، وذلك بفرض أن $f'(x) \neq 0$

وإنها دالة مستمرة .

فالقاعدة إذن أنه إذا كان لدينا دالة لها مقلوب، فإن مشتقة هذه الدالـــة تساوى مقلوب مشتقة مقلوبها.

إذا كانت $y = 4x^2$ فإن $\frac{dy}{dx} = 8x$ كما أن $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{8x}$ حيث

أن مقلوب الدالة y هو : $x = \sqrt{y/4}$ ، وبالتالى فإن :

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{y}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{4x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8x}$$

مما يوضح القاعدة السابقة .

3- المشتقات من درجة أعلى: تعرف مشتقة المشتقة أو المــشتقة مــن الدرجة الثانية والتي يرمز لها بالرمز

أو $f''(x)$ كما يلى :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f'(x+\triangle x) - f'(x)}{\triangle x} \quad (٢-١)$$

فالمشتقة الثانية هي معدل تغير المشتقة الأولى – أي أنها تعبر عن تغير ميل الدالة.

وبنفس الطريقة، يمكن تعريف المشتقات من درجة أعلى.

قاعدة: إذا كان لدينا معادلة من الدرجة n، فإن مشتقتها من الدرجة n تساوى ثابتا، والمشتقة من الدرجة $n + I$ تساوى صفرا.

مثال :

إذا كانت $y = x^2 + 10x - 3$ (وهى دالة من الدرجة الثانية) ،

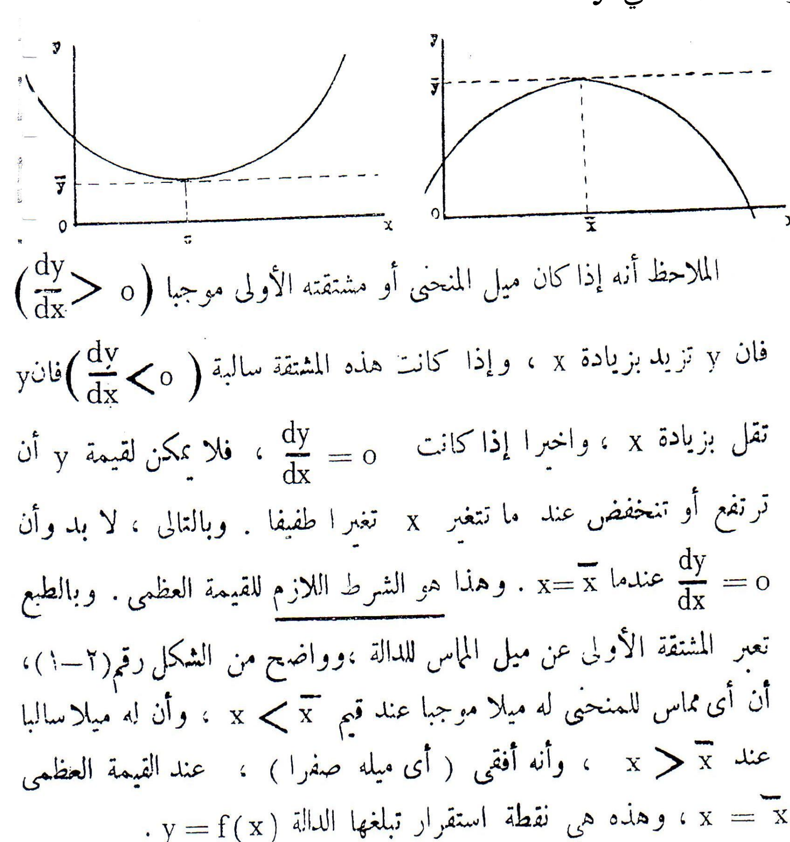
فإن $\frac{d^2y}{dx^2} = k$ حيث k ثابت و $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ ، ويتضح ذلك بحساب تلك المشتقات إذ أن :

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 10 \text{ ؛ } \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \text{ وأخيرا فإن } \frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

4- القيم العظمى والصغرى للدوال ذات المتغير الواحد: يفترض عموما أن أية وحدة متخذه لقرارات، سواء كانت هذه الوحدة منشأة أو فردا أو حكومة، تسعى إلى الوصول إلى القيمة العظمى لشيء ما – قد يكون ربحا أو منفعة أو رفاهية اجتماعية. ومن هنا نشأت أهمية دراسة أساليب تحديد القيم العظمى والصغرى للدوال – وفيما يلي، عرض سريع للشروط اللازمة والكافية للقيم العظمى والصغرى للدوال ذات المتغير الواحد.

إذا كانت $y = f(x)$، وكانت y تتزايد مع x إلى أن يصل x إلى قيمة $\bar{x}$، ثم تتناقص y بعد ذلك، فلا بد وأن تكون y قد بلغت قيمة عظمى عند القيمة $x = \bar{x}$ وهذه القيمة هي $\bar{y}$

شكل رقم (1)



الملاحظ أنه إذا كان ميل المنحنى أو مشتقته الأولى موجبا $\left(\frac{dy}{dx} > 0\right)$ فان y تزيد بزيادة x ، وإذا كانت هذه المشتقة سالبة $\left(\frac{dy}{dx} < 0\right)$ فان y تقل بزيادة x ، واخيرا إذا كانت $\frac{dy}{dx} = 0$ ، فلا يمكن لقيمة y أن ترتفع أو تنخفض عند ما تتغير x تغيرا طفيفا . وبالتالى ، لا بد وأن $\frac{dy}{dx} = 0$ عندما $x = \bar{x}$. وهذا هو الشرط اللازم للقيمة العظمى . وبالطبع تعبر المشتقة الأولى عن ميل المماس للدالة ،وواضح من الشكل رقم(٢-١)، أن أى مماس للمنحنى له ميلا موجبا عند قيم $x < \bar{x}$ ، وأن له ميلا سالبا عند $x > \bar{x}$ ، وأنه أفقى (أى ميله صفرا) ؛ عند القيمة العظمى $x = \bar{x}$ ، وهذه هى نقطة استقرار تبلغها الدالة $y = f(x)$.

ولننتقل الآن حيث الدالة $y = f(x)$ تتخذ قيمة صغرى عنـــد $x = \bar{x}$.

من الواضح أن ميل المماس للمنحنى عند $x = \bar{x}$ يساوى صفرا. وبالتالي فإن شرط أن المشتقة الأولى للدالة تساوى الصفر ليس كافيا للتفرقة بين قيمة عظمى وقيمـــة صغرى للدالة، وهو يشير فقط إلى حدوث تحول في اتجاه مجرى الدالة y.

والخلاصة أن:

الشرط اللازم للحصول على قيمة عظمة أو صغرى للدالـــة $y = f(x)$ هو أن:

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = 0$$

ولنبحث الآن عن الشرط الكافي للتفرقة بين قيمة عظمى وقيمة صغرى.

فبالرجوع إلى الشكلين السابقين يتضح أنه:

1-في حالة القيمة العظمى، فإن ميل أي مماس للمنحنى يتناقص عند زيادة x في المنطقة المجاورة للقيمة x.

2-في حالة القيمة الصغرى، يتزايد ميل أي مماس للمنحنى عند زيادة x في المنطقة المجاورة للقيمة x.

وهذا هو الشرط الكافي للقيم العظمى أو الصغرى. ويمكن التعبير عن هذا الشرط باستخدام المشتقات الثانية. فالمشتقة الثانية تعبر عن معدل تغير ميل المماس للمنحنى، فإذا تناقص هذا الميل كانت المشتقة الثانية سالبة،

($\frac{d^2y}{dx^2} < 0$) وإذا تزايد الميل كانت هذه المشتقة موجبة

($\frac{d^2y}{dx^2} > 0$) أى أن الشرط الكافى للقيم العظمى أو الصغرى هو أنه عند

$$f'(x) = 0$$

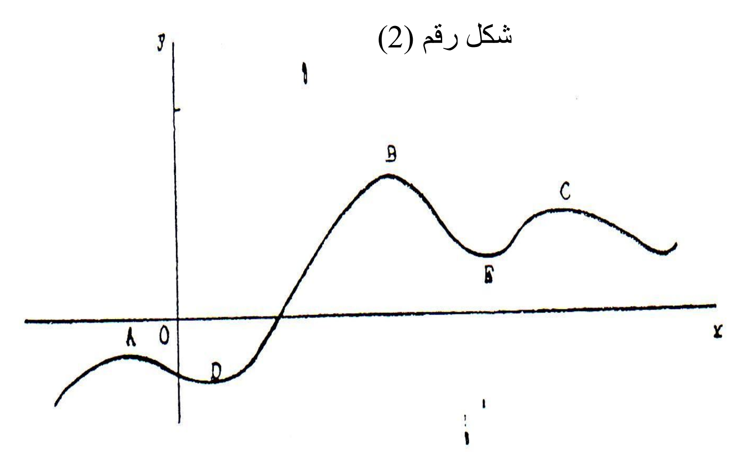
١- إذا كانت $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) < 0$ فيكون للدالة قيمة عظمى.

٢- إذا كانت $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) > 0$ فيكون للدالة قيمة صغرى.

ملاحظات:

أولاً: لا تضمن الشروط السابقة أن القيمة العظمى أو الصغرى للدالة قيمة قصوى كلية (global) وإنما تعبر فقط عن بلوغ الدالة قيمة قصوى محلية (local).

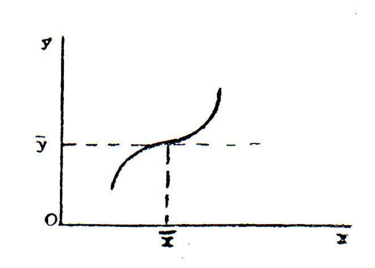
شكل رقم (2)

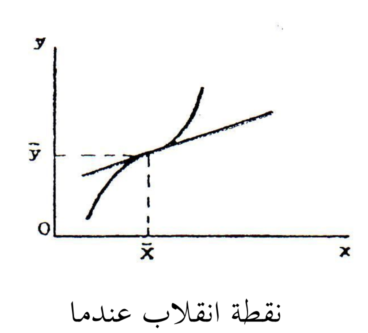


فيتطبيق الشروط السابقة الذكر على الدالة الممثلة في الشكل نتبين أن كل من A ، B ، C قيمة عظمى وأن D ، E قيمتان صغيريان.

وهذه الشروط تضمن فقط أن القيمة التي تبلغها الدالة قيمة قصوى بالنسبة للقيم المجاورة، ولكنها لا تؤكد أن هذه القيمة قيمة قصوى كلية، أي أنها أعلى قيمة تتخذها الدالة على الاطلاق – فنجد مثلا أن A قيمة عظمى بالنسبة للقيم المجاورة، رغم أنها أقل من E التي تعبر عن قيمة صغرى.

ثانياً : إذا كانت $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 0$ ، فإن الدالة تمر بنقطة انقلاب Inflection point ، وذلك سواء $f'(x) \neq 0$ أو $f'(x) = 0$ والشكلان التاليان يمثلان نقطتين انقلاب عندما $f'(x) = 0$ وعندما $f'(x) \neq 0$.





نقطة انقلاب عندما

نقطة انقلاب عندما

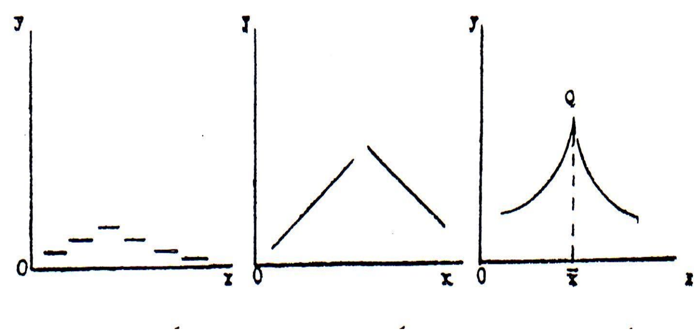
شكل رقم (3)

f'' ،$f'(x) = o$ / $f''(x) = o$ ، $f'(x) = o$

$(x) = o$

ثالثاً: من الواضح أن الشرط اللازم لبلوغ الدالة قيمة عظمى أو صغرى هو أن يكون لهذه الدالة أولا مشتقة أولى. أي أنه يجب أن تكون الدالة مستمرة، وألا تكون منكسرة (kinked) – وتبين الأشكال التالية حالات دوال غير مستمرة ودوال منكسرة.

شكل رقم (4)



دالة منكسرة دالة غير مستمرة دالة غير مستمرة

مثال:

أوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالتين:

1- $y = x_2 - 4x - 6$

$y = \frac{4 + X^2}{x}$

الحل:

1-إذا كانت $y = x^2 - 4x - 6$

فالشرط اللازم للقيمة القصوى هو:

$= \frac{dy}{dx} = o$

ومنها $x = 2$

أي أن الدالة تصل إلى قيمة قصوى عند $x = 2$ ، ولتحديد ما إذا كانت هذه القيمة قيمة صغرى أو عظمى نحسب المشتقة الثانية:

D^2y	=	$2 > 0$
Dx^2		

وبالتالي تبلغ الدالة قيمة صغرى عند $x = 2$ وهذه القيمة هي: $y = -10$

٢ — لننتقل الآن إلى الدالة $y = \frac{4 + x^2}{x}$ ويمكن كتابتها فى الصورة :

$$y = 4x^{-1} + x$$

بأخذ المشتقة الأولى ومساواتها بالصفر ، نحصل على :

$$\frac{dy}{dx} = -4x^{-2} + 1 = 0$$

ومنها : $x^{-2} = \frac{1}{4}$

أى أن $x^2 = 4$

أو $x = \pm 2$

ولنحسب الآن المشتقة الثانية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8x^{-3}$$

فإذا كانت $x = 2$ نحصل على $\frac{d^2y}{dx^2} = 8(2)^{-3} = 1 > 0$

قيمة صغرى وهي : $y = 4$

وإذا كانت $x = -2$ نحصل على $\frac{d^2y}{dx^2} = 8(-2)^{-3} = -1 < 0$

قيمة عظمى وهى : $y = -4$

ثانياً: الدوال متعددة المتغيرات:

نلاحظ أن الدوال السابقة لا تحتوى إلا على متغير مستقل واحد. ولكننا نقابل في التطبيقات الاقتصادية كثيرا من الحالات تحتوى فيها الدالة على أكثر من متغير مستقل. وعندئذ يقال أن الدالة متعددة المتغيرات، وتكتب صيغتها العامة كما يلي:

$$(1\text{-}2) \quad y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

حيث y المتغير التابع دالة في المتغيرات المستقلة x_1 , x_2 , ... , x_n

1-المشتقة الجزئية من الدرجة الأولى:

قد نعنى فى مثل هذه الحالات بمعرفة أثر تغير أحد المتغيرات المستقلة على الدالة ، مع بقاء المتغيرات الأخرى على حالها – فيعرف المعامل التفاضلى الجزئى الأول للدالة y بالنسبة إلى x_i حيث $i = 1, 2, \ldots, n$ والذى يرمز له بالرمز f_i أو $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ على أنه :

$$f_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x_i}$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_n)}{\Delta x_i}$$

حيث Δx_i ، Δy تعبران على التوالى عن تغير x_i والتغير المقابل فى قيمة المتغير التابع .

وعند إجراء التفاضل الجزئي بالنسبة لمتغير ما، نفترض أن المتغيرات المستقلة غير الذي يراد تغييره كميات ثابتة، ونقوم بالتفاضل بنفس الطريقة التي بيناها في حالة تفاضل دالة ذات متغير واحد.

والملاحظ أن دالة ذات n من المتغيرات المستقلة لها n من المشتقات الجزئية الأولى – فإذا كان لدينا دالة ذات متغيرين مثلا $y = f(x_1, x_2)$ فيكون لها مشتقتان جزئيتان من الدرجة الأولى، وهما f_1 ، f_2

مثال : إذا كانت

$$y = x_1 + 3x_1x_2^2 + x_2 \log x_1$$

فإن ،

$$f_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = 1 + 3x_2^2 + \frac{x_2}{x_1}$$

$$f_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = 6x_1x_2 + \log x_1$$

2- المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية: يمكن الحصول على المـــشتقات الجزئية من الدرجة الثانية بإعادة تفاضل الدالة مرة أخرى، وذلك إمـــا بالنـــسبة للمتغير نفسه أو بالنسبة لمتغير آخر – وفي الحالة الأولى تسمى المشتقة الجزئية الثانية بالمشتقة الجزئية الثانية المباشرة وفي الحالة الثانية، يطلق عليها المشتقة الجزئية الثانيـــة التبادلية – Second order cross partial derivative

ومجموع المشتقات الجزئية الثانية لدالة تحتوى على n من المتغيرات المستقلة هو $n \times n = n^2$

فإذا كانت $y = f(x_1, x_2)$ فلهذه الدالة 4 مشتقات جزئية ثانية:

فاذا كانت $y = f(x_1, x_2)$ فلهذه الدالة ٤ مشتقات جزئية ثانية :

$$f_{11} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, f_{22} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}, f_{12} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, f_{21} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1}$$

ويمكن وضع هذه المشتقات فى صورة مصفوفة كما يلى : $\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$

وإذا كانت $y = f(x_1 , x_2 , x_3)$ يكون عدد المشتقات الجزئية الثانية 9، ويمكن ترتيبها في مصفوفة:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

وأخيرا، في حالة وجود n من المتغيرات المستقلة، تكون مصفوفة المشتقات الجزئية الثانية على النحو التالي:

$$H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \qquad (٢-٢)$$

ويطلق على هذه المصفوفة اسم المصفوفة الهيسية Hessian matrix جدير بالملاحظة أن ترتيب التفاضل لا يؤثر على قيمة المشتقة الجزئية الثانية وبالتالي فإن: $f_{ij} = f_{ji}$، أي أننا إذا أجرينا التفاضل بالنسبة إلى x_i ثم بالنـــسبة إلى x_j، نحصل على نفس النتيجة التي يمكن الوصول إليها بالتفاضل بالنسبة إلى x_j أولا ثم بالنسبة إلى x_i.

مثال:

المشتقات الجزئية الثانية لدالة المثال السابق هي:

$$f_{11} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = -\frac{x_2}{x_1^2} \qquad f_{22} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 6x_1$$

$$f_{12} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = 6x_2 + \frac{1}{x_1} \qquad f_{21} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = 6x_2 + \frac{1}{x_1}$$

وبترتيب هذه المشتقات في صورة مصفوفة نحصل على:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 / x_1^2 & 6x_2 + 1/x_1 \\ 6x_2 + 1/x_1 & 6x_1 \end{bmatrix}$$

3- المشتقة التفاضلية الكلية: رأينا أن المشتقة الأولى لدالة ذات متغير واحد هي:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

أو :

$$dy = f'(x)\,dx$$

وبنفس الطريقة يمكن تعريف التفاضل الكلي لدالة ذات n من المتغيرات المستقلة :

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n \qquad (٢-٣)$$

وهي معادلة المسطح المماس للسطح المحدد بالمعادلة (2-1) وتعطي (2-3) قيمة تقريبية لقيمة تغير الدالة عندما تتغير جميع المتغيرات، وذلك بفرض أن هذه التغيرات صغيرة.

والمشتقة الكلية للدالة y بالنسبة للمتغير x_i هي:

$$\frac{dy}{dx_i} = f_1 \frac{dx_1}{dx_i} + f_2 \frac{dx_2}{dx_i} + \dots + f_i + \dots + f_n \frac{dx_n}{dx_i} \qquad (٤-٢)$$

وتعبر عن معدل تغير y بالنسبة لتغير x_i عند السماح لجميـــع المـــتغيرات الأخرى بالتغير، حيث أن جميع ال xj دوال معينة في x_i.

مثال:

التفاضل الكلي للدالة:

$$y = x_1 + 3x_1x_2^2 + x_2 \log x_1$$

هو

$$dy = f_1\, dx_1 + f_2 dx_2 = (1 + 3x_2^2 + \frac{x_2}{x_1})dx_1 + (6x_1x_2 + \log x_1)dx_2$$

4-القيم العظمى أو الصغرى للدوال متعددة المتغيرات:

المطلوب الآن هو البحث عن قيم المتغيرات التي تكون عندها الدالـــة f في نهايتها العظمى أو نهايتها الصغرى.

ففي هذه الحالة، كما في حالة الدوال ذات المتغير المستقل الواحد، يجـــب توافر شرطين حتى تكون الدالة عند قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

الشرط اللازم:

هو أن تبلغ الدالة نقطة استقرار على السطح $y = (x_i, x_2, \dots, x_n)$ f وتكون عند هذه النقطة جميع المشتقات الجزئية الأولى للدالة بالنسبة للمـــتغيرات المستقلة مساوية للصفر. أي أن:

$$f_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = 0 \;,\; f_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0 \;, \dots, f_n = \frac{\partial y}{\partial x_n}$$

الشرط الكافي:

بإعادة تفاضل الدالة جزئيا بالنسبة لجميع المتغيرات نحصل على مـــصفوفة المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية H، وتحتوي على $n \times n$ عنصرا – بافتراض

أن عدد المتغيرات المستقلة في الدالة يساوي n. ومن هذه المصفوفة نحصل على المحدد:

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & . \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

- فاذا كانت قيم جميع المحيددات الرئيسية (principal minors) الممكن الحصول عليها من المحدد $|H|$ موجبة ، يقال عندئذ أن المحدد $|H|$ مؤكد الإيجاب (positive definite) وتكون الدالة قد بلغت نهاية صغرى . .

-وإذا تبادلت المحيددات الرئيسية الإشارة الجبرية بين سالب وموجب مبتدئة بالإشارة السالبة، يكون المحدد مؤكد السلبية – (negative defi nite)، وتبلغ الدالة نهاية عظمى. أي أنه حتى تكون نقطة استقرار الدالة قيمة عظمى، يجب أن تكون إشارات المحيددات الرئيسية كما يلي:

$|H_1| < 0$، $|H_2| > 0$، $|H_3| < 0$ .... حيث يشير الرمز $|H_i|$ ($i = 1, 2, \dots, n$) إلى المحيدد الرئيسى الذى نحصل عليه من $|H|$ باستبعاد آخر n-i صف وآخر n-i عمود .

-تبلغ الدالة نقطة ركاب Saddle point عند نقط الاستقرار الأخرى التي لا تتحقق شروط النهايات العظمى أو الصغرى.

أمثلة:

مثال 1: يهدف هذا المثال إلى تطبيق الشروط السابقة على حال دالة ذات متغيرين مستقلين، فإذا كانت:

$$y = f(x_1, x_2)$$

فإن نقط النهاية العظمى أو الصغرى تنشأ عند نقط الإستقرار على سطح الدالة أى عند :

$$f_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = 0 \qquad f_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0$$

وهذا هو الشرط اللازم :

أما الشرط الكافى فهو أن يكون المحدد $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$ مؤكد الإيجاب حتى تكون نقطة الإستقرار نهاية صغرى وأن يكون هذا المحدد مؤكد السلبية حتى تمثل نقطة الإستقرار نهاية عظمى . ويمكن التعبير عن هذه الشرط بطريقة أخرى فنقول :

– إذا كانت $f_{22} > 0 \qquad f_{11} > 0$

$$f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} = f_{11} f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

فإن نقطة الإستقرار تمثل نهاية صغرى .

– وإذا كانت $f_{22} < 0 \qquad f_{11} < 0$

$$f_{11} f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

فتمثل هذه النقطة قيمة عظمى .

– لاحظ أنه عند النهايات العظمى والصغرى يكون $f_{11} f_{22} - f_{12}^2 > 0$ وإذا لم يتحقق هذا الشرط تكون نقطة الإستقرار ممثلة لنقطة ركاب .

والمثالان (٢) و (٣) يوضحان كيفية إيجاد نقط النهايات العظمى والصغرى .

مثال ٢ : إذا كانت $y = f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2$

فنلاحظ أن :

$$f_1 = 3x_1^2 - 3x_2 = 0$$
$$f_2 = 3x_2^2 - 3x_1 = 0$$

ومن هاتين المعادلتين نحصل على مجموعتين من قيم x_1, x_2 وهى :

$$(x_1, x_2) = (1,1) \quad , \quad (x_1, x_2) = (0,0)$$

ان محدد المشتقات الجزئية الثانيه هو :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{vmatrix}$$

فعندما $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$ يصبح هذا المحدد $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$ ومنه نتبين أن :

$$f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} = -9 < 0$$

أى أن النقطة $x_1 = x_2 = 0$ تمثل نقطة ركاب .

وعندما $x_1 = 1$ و $x_2 = 1$ يكون المحدد $\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$ ومنه نتبين أن :

$$f_{11} = 6 > 0, f_{22} = 6 > 0, f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} = 36 - 9 = 27 > 0$$

أى أن النقطة $x_1 = x_2 = 1$ نقطة نهاية صغرى وتبلغ عندها قيمة الدالة : $y = -1$

مثال ٣ :

إذا كانت $y = f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2$

فإن :

$$f_1 = -4x_1 + x_2 = 0$$

$$f_2 = -2x_2 + x_1 = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على $(x_1, x_2) = (0,0)$

كما أن

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$f_{11} = -4 < 0, \quad f_{22} = -2 < 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 8 - 1 = 7 > 0$$

أي أن النقطة $x_1 = x_2 = 0$ نقطة نهاية عظمى ، وعندها تكون قيمة الدالة : $y = 0$

5- القيم العظمى أو الصغرى المشروطة: سنبحث الآن عن القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

$$Y = f(x1, x2, \ldots, xn) \quad (1-2)$$

بحيث أن المتغيرات المستقلة x1 ، x2 ،... xn تحقق العلاقة:

$$g(x1, x2, \ldots, xn) \quad (5-2)$$

حيث k رقم ثابت.

وفيما يلي، نفترض أن المتغيرات تخضع لقيد واح – إلا أنه يجب ملاحظة أنه يمكن أن تتعدد القيود ولكن يجب ألا يزيد عددها عن عدد المتغيرات المستقلة.

ويمكن اتباع أحد أسلوبين لإيجاد هذه القيمة القصوى.

الأسلوب الأول – طريقة التعويض:

يمكن تحديد النهاية العظمى أو الصغرى بالتعويض من المعادلة (2-5) عن قيمة أحد المتغيرات وليكن $xi = h(x1, \ldots xi - I, xi + I, \ldots, xn)$ في المعادلة (2-1)، فنحصل على دالة في $n - I$ متغيرا، ومن ثم نبحث عن قيمتها العظمى أو الصغرى بالطريقة المتبعة عادة لإيجاد النهايات غير المشروطة.

مثال 1:

أوجد النهاية العظمى أو الصغرى للدالة:

$$f(x1, x2) = (x1 - I)^2 + (x2-2)^2$$

بحيث أن $g(x1, x2) = x1 - x_2 - 2 = 0$

الحل:

من معادلة القيد نجد أن $x1 = (x2) = 2 + x2$

حيث h رمز لدالة في $x2$ وبالتعويض في f نحصل على:

$$f(x1, x2) = f[h(x2), x2] = (x2 + 1)2 + (x2 - 2)2$$

وهى دالة فى متغير واحد x_2 يمكن إيجاد قيمتها المستقرة بوضع $\frac{df}{dx_2}=0$

$$\frac{df}{dx_2} = 2(x_2+1)+2(x_2-2) = 4x_2-2 = 0$$

ومنها : $x_2 = 1/2$ وعند هذه القيمة x_2 نجد أن $x_1=2+x_2=5/2$

وبحساب المشتقة الثانية نتبين أن : $\frac{d^2f}{dx_2^2} = 4 > 0$ أى أن هذه القيمة

ة صغرى .

أى أن الدالة f تبلغ نهاية صغرى عند النقطة $(x_1 , x_2) = (5/2 , 1/2)$

مثال ٢ :

أوجد النهاية العظمى أو الصغرى للدالة :

$$y = f(x_1 , x_2 , x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

بشرط أن :

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

الحل:

من معادلة القيد نحصل على

$$x_3 = h(x1 , x2) = 2x1 + x2 - 1$$

وبالتعويض في الدالة f:

$$x_1 , x_2 , h(x_1 ,] = X_1^2 + x_2^2 + (2x1 + x2 - 1)^2$$

$f[x_2)$

ومنها

$$f1 = 2x1 + 4(2x1 + x2 - 1) = o$$
$$f2 = 2x2 + 2(2x1 + x2 - 1) = o$$

وبحل المعادلتين السابقتين نجد أن : $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1/6$ وبالتعويض

فى h نحصل على $x_3 = -1/6$.

كما أن

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$$

أى أن

$$f_{11} = 10 > 0 \ , \ f_{22} = 4 > 0 \ , \ f_{11} f_{22} - f_{12}^2 = 40 - 16 = 24 > 0$$

ومن ذلك نتبين أن النقطة $(x_1, x_2, x_3) = (1/3, 1/6, -1/6)$ تمثل قيمة صغرى للدالة f .

الأسلوب الثانى – طريقة لاجرانج :

نلاحظ أن طريقة التعويض ليست متيسرة فى جميع الحالات ، لذلك تطبق طريقة أكثر عمومية ، تتضمن استخدام مضاعفات لاجرانج Lagrange multipliers فنكتب الدالة $V = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)$ فى الصورة (٥) .

$$V = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda [k - g(x_1, x_2, \dots, x_n)] \qquad (٢-٦)$$

حيث $\lambda > 0$ مضاعف لاجرانج وقيمته غير محددة ، ويعامل كأنه متغير مستقل فى الدالة V .

وفيما يلي نقوم بالبحث عن القيم العظمى أو الصغرى للدالة V والملاحظ أن القيمة القصوى للدالة V تعادل القيمة القصوى f عندما k = (x1, x2,…, xn) g أي أن f تعادل V عند قيم المتغيرات التي تحقق القيد.

وفي هذه الحالة أيضا، يجب توافر شروط لازمة وأخرى كافية لبلوغ الدالة نهاية عظمى أو صغرى.

الشرط اللازم:

هو أن تبلغ V نقطة مستقرة، أي أن تتوافر الشروط التالية:

$$V_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1} = f_1 - \lambda g_1 = 0$$

$$V_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2} = f_2 - \lambda g_2 = 0$$

$$V_n = \frac{\partial V}{\partial x_n} = f_n - \lambda g_n = 0$$

$$V_\lambda = \frac{\partial V}{\partial \lambda} = k - g\,(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

لاحظ أن الشرط الأخير يضمن تحقيق القيد.

وبحل هذه المجموعة من المعادلات نحصل على نقطة استقرار ل f عنـــدما يكون: g (x1 , x2 , …, xn).

الشرط الكافي :

إذا أشرنا إلى المشتقات الجزئية الثانية لـ V بالرمز V_{ij} وكوننا المحددات التالية :

$$\begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & -g_1 \\ V_{21} & V_{22} & -g_2 \\ -g_1 & -g_2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} & -g_1 \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & -g_2 \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} & -g_3 \\ -g_1 & -g_2 & -g_3 & 0 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1n} & -g_1 \\ V_{21} & V_{22} & \dots & V_{2n} & -g_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{n1} & V_{n2} & \dots & V_{nn} & -g_n \\ -g_1 & -g_2 & \dots & -g_n & 0 \end{vmatrix}$$

ونحصل على هذه المحددات بإحاطة المحيددات الرئيسية للمحدد الهيـــسي Hessian للمشتقات الجزئية الثانية للدالة V بصف وعمـــود مكـــونين مـــن المشتقات الجزئية الأولى للقيد.

وبموجب الشروط الكافية:

-يجب أن تكون جميع تلك المحددات سالبة، حتى تحقق الدالة نهاية صغرى.

-ويجب أن تتبادل هذه المحددات الإشارة، بادئة بالإشارة الموجبة، أي أن إشارة هذه المحددات يجب أن تكون، من اليسار إلى اليمين: + ، − ، + ، ... حتى نحصل على نهاية عظمى للدالة.

مثال 1:

أوجد النهاية العظمى أو الصغرى للدالة:

$$f(x1, x2) = (x1 - 1)2 + (x2 - 2)2$$

بشرط أن تكون: $x1 - x2 = 2$

وذلك بطريقة لاجرانج.

الحل :

نكون صيغة لاجرانج :

$$V = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + \lambda (2 - x_1 + x_2)$$

ثم نوجد المشتقات الجزئية الأولى :

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1) - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = 2(x_2 - 2) + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 2 - x_1 + x_2 = 0$$

ومن هذه المعادلات الثلاثة نجد ان :

$$x_1 = 5/2 \quad , \quad x_2 = 1/2 \quad , \quad \lambda = 3$$

نكون الآن المحدد :

$$\begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & -g_1 \\ V_{21} & V_{22} & -g_2 \\ -g_1 & -g_2 & -0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 0 - 2 = -4 < 0$$

فاالدالة f تبلغ نهاية صغرى عند $(x_1, x_2) = (5/2, 1/2)$

مثال ٢ :

استخدم طريقة لاجرانج لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة :

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^2_1 + x_2^2 + x_3^2$$

بحيث تكون

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

الحل :

نكون صيغة لاجرانج

$$V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda (1 - 2x_1 - x_2 + x_3)$$

ثم نحسب المشتقات الجزئية الأولى :

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2x_1 - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} = 2x_3 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 1 - 2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

ومنها نجد أن :

$$x_1 = 1/3 \qquad x_2 = 1/6 \qquad x_3 = -1/6 \qquad \lambda = 1/3$$

نكون الآن المحددات التالية :

$$\begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & -g_1 \\ V_{21} & V_{22} & -g_2 \\ -g_1 & -g_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 0 - 8 = -10 < 0$$

$$\begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} & -g_1 \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & -g_2 \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} & -g_3 \\ -g_1 & -g_2 & -g_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2-2) + 2(-8) = -8 - 16 = -24 < 0$$

وجميع هذه المحددات سالبة ، وبالتالى تبلغ الدالة نهاية صغرى عند النقطة :

$$(x_1, x_2, x_3) = (1/3, 1/6, -1/6)$$

المصفوفات والمعادلات الخطية

أولاً: تعريف المصفوفات:

يطلق اسم مصفوفة على مجموعة من الأرقام مرتبة في صفوف وأعمدة محاطة بقوسين ويخضع ما يجري عليها من عمليات لقواعد معينة نوضحها فيما بعد.

ومن أمثلة المصفوفات:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad ، \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

ويمكن اعتبار هذه المصفوفات على أنها مصفوفات معـــاملات مجموعــة معادلات خطية متجانسة أو على أنها مصفوفات لمجموعة معادلات خطيـــة غـــير متجانسة. خذ مثلاً المصفوفة اليسرى، فيمكن اعتبارهـــا مـــصفوفة معـــاملات المعادلاتين.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (١-١)$$

وتمثل الأرقام a_{jj} عناصر المصفوفة – حيث الدليل الأول $I = 1,2, .. ,$ m يشير إلى رقم الصف والدليل الثاني $j = 1,2, .. , n$ يبين رقم العمود الذي يقع فيه العنصر. إذا كانت المصفوفة تشتمل على m مـــن الـــصفوف و n مـــن الأعمدة، فإننا نقـــول أن درجتـــها order "m في "n أو m x n وتـــسمى المصفوفة (1 – 1) بالمصفوفة $[a_{jj}]$ أو بالمصفوفة $A = [a_{jj}]$ ذات الدرجة m x n ويمكن للتبسيط تسميتها بالمصفوفة A.

ثانياً: بعض أنواع المصفوفات:

1-المصفوفة المربعة Square Matrix: عندما تكون $m = n$ يقال إن المصفوفة (1) مربعة ودرجتها n وتسمى عندئذ العناصـــر $a_{nn}, \dots , a_{22},$ a_{11} بالعناصر القطرية ويطلق على مجموعها اسم أثر المصفوفة Trace.

2-مصفوفة الصفر Zero matrix: يطلق هذا الاسم على مـــصفوفة جميع عناصرها تساوي الصفر وعندئذ $A = O$.

3-المصفوفة المثلثة Triangular matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

يطلق على أية مصفوفة مربعة جميع عناصرها $a_{ij} = 0$ عندما $i > j$ اسم مصفوفة مثلثة إلى أعلى Upper triangular

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ويطلق اسم مصفوفة مثلثة إلى أسفل Lower triangular على أية مصفوفة مربعة جميع عناصرها $a_{ij} = 0$ عندما $i < j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

وتسمى أية مصفوفة مثلثة إلى أعلى وإلى أسفل فى وقت واحد بمصفوفة قطرية diagonal

إذا كانت جميع العناصر القطرية في المصفوفة السابقة تساوي عدد ثابـــت K أي $a_{11} = \dots = a_{nn} = k$ مطلقة على المصفوفة القطرية اسم "المصفوفة العددية" Scalar matrix.

4-مصفوفة الوحدة Identity matrix: إذا كانت المصفوفة قطرية، وجميع عناصر القطر الرئيسي تساوي الوحدة أي أن $a_{11} = a_{22} = \dots a_{nn}$ $= I$ تسمى المصفوفة بمصفوفة الوحدة ويرمز لها بالرمز I_n

حيث n يشير إلى درجة المصفوفة أو للتبسيط بالرمز I، فمثلاً:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5-مقلوب المصفوفة Inverse: إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين بحيث أن $AB = BA = I$ فإن Bتسمى بمقلوب A ونكتب $B = A^{-1}$ كما أن $A = B^{-1}$. ليس لجميع المصفوفات المربعة مقلوباً. ولكن إذا وجد مقلـــوب للمصفوفة A فإنه يكون وحيداً.

6-مبدول المصفوفة Transpose: يطلق اسم مبدول المـــصفوفة A على المصفوفة التي تحصل عليها بتحويل صفوف A إلى أعمدة وأعمـــدة A إلى صفوف، ونرمز له بالرمز `A

فمثلا إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ فان $A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

وإذا كانت درجة A هي m x n فإن درجـــة `A تكـــون n x m.

لاحظ أيضاً أن $(A`)` = A$ أي أن مبدول المبدول هو المصفوفة الأصلية.

7-المصفوفات المتماثلة: Symmetric matrices: تكون المصفوفة A متماثلة إذا كانت $A = A`$ وبالتالي فالمصفوفة المربعـــة $A = [a_{jj}]$ تكـــون متماثلة إذا كانت $a_{jj} = a_{jj}$ عند جميع قيم I و j

فالمصفوفة التالية مثلا متماثلة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

تكون المصفوفة المربعة A متماثلة ملتويـــة Skew Symmetric إذا كـــان $A` = - A$ أي إذا كان $a_{jj} = - a_{jj}$ لجميع i و j من الواضـــح أن العناصـــر القطرية يجب أن تكون مساوية للصفر – فالمصفوفة التالية مثلاً متماثلة ملتوية:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

ثالثاً: عمليات جمع وضرب المصفوفات:

1-المصفوفات المتساوية:

يقال أن مصفوفتين $A = [a_{jj}]$ و $B = [b_{jj}]$ متـــساويتان ($A = B$)

إذا كانت لهما نفس الدرجة وكان كل عنصر من عناصر أحدهما مساوياً للعنصر المناظر له في الأخرى. أي أن:

$$Ajj = bjj \quad (I = 1,2, \ldots, m; j = 1,2, \ldots,2)$$

2-جمع المصفوفات:

يعرف مجموع (أو الفرق بين) مصفوفتين $A = [a_{jj}]$ و $B = [b_{jj}]$

درجتها

m x n أي $A \pm B$ على أنه مصفوفة $C = [cjj]$ درجتها m x n

وكل عناصرها يساوي مجموع (أو الفرق بين) العنصرين المناظرين من A وB أي أن:

$$A \pm B = [\, ajj \pm bjj]$$

مثال ١ : إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ فان

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 + 2 & 2 + 3 & 3 + 0 \\ 0 + (-1) & 1 + 2 & 4 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

كما أن

$$A-B = \begin{bmatrix} 1 - 2 & 2 - 3 & 3 - 0 \\ 0-(-1) & 1 - 2 & 4 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

يقال إن مصفوتين لهما نفس الدرجة قابلتان للجمع أو الطرح – لاحـــظ أنه لا يمكن جمع أو طرح مصفوفتين مختلفتين في الدرجة.

أن مجموع K من المصفوفات A والمصفوفة ذات نفس درجة A الـــتي تتكون عناصرها من عناصر A كل منها مـــضروباً في K. أي أن $KA = AK$ هي المصفوفة التي نحصل عليها بضرب كل عنصر من عناصر A في K

مثال ٢ : إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ فان

$$A+A+A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}=3A=A.3$$

كما أن

$$-5A = -5\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5\ (1) & -5\ (-2) \\ -5\ (2) & -5\ (3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -10 & -15 \end{bmatrix}$$

وبوجه خاص فإن A – هي المصفوفة التي نحصل عليها بتغير جميع إشارات عناصر المصفوفة A.

بعض قواعد جمع المصفوفات:

(١) $A+B = B+A$

(٢) $A+(B+C) = (A+B)+C$

(٣) $(A+B)\,k = kA+kB = k\,(A+B)$ ، حيث k أي رقم ثابت

(٤) يمكن إيجاد مصفوفة D بحيث أن $A+D = B$

لاحظ أن هذه القواعد تنتج من قواعد الجبر الأولية التي تحكم عمليات جمع الأرقام وتبين هذه القواعد أن المصفوفات القابلة للجمع تخضع لنفس القواعد التي تخضع لها عناصر هذه المصفوفات.

3-ضرب المصفوفات:

يعرف حاصل ضرب المصفوفتين AB مأخوذتين بهذا الترتيب، حيث درجة A هي I x m أي $A = [a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1m}]$ ودرجة B هي

أي $m \times 1$ $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$ على أنه المصفوفة C ذات الدرجة 1×1 حيث

$$C = [\ a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + \ldots + a_{1m}\ b_{m1}\ ]$$

أى أن :

$$AB = [\, a_{11}\ \ a_{12} \ldots a_{1m}\,] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1m}b_{m1}]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{m} a_{1K} b_{K1} \right]$$

لاحظ أن عملية الضرب تتم بضرب الصف في العمود، أي أن كل عنصر من الصف يضرب في العنصر المناظر له من العمود، ثم يتم جمع حواصل الضرب هذه.

مثال ٣ :

$$[\ 2\ \ 3\ \ 4\ ] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [\, 2(1) + 3\ (-1) + 4\ (2)\,] = 7$$

$$[\ 3\ \ -14\ ] \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = [\ -6 - 6 + 12\ ] = 0$$

ويمكن تعميم هذا التعريف كما يلي: يعرف حاصل ضرب المـــصفوفتين AB، مأخوذتين بهذا الترتيب، حيث درجة المصفوفة $A = [a_{jj}]$ هي $m \times p$ ودرجة $B = [b_{jj}]$ هي $p \times n$ على أنــه المـــصفوفة $C = [c_{jj}]$ ذات الدرجة $m \times n$ والتي يتكون كل عنصر c_{jj} كحاصل ضرب صف رقم i مـــن المصفوفة A والعموم رقم j من المصفوفة B أي أن:

مثال ٤ :

$$AB=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} & a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} \\ a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} & a_{21}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22} \\ a_{31}\, b_{11} + a_{32}\, b_{21} & a_{31}\, b_{12} + a_{32}\, b_{22} \end{vmatrix}$$

يقال أن مصفوفتين A و B قابلتان للضرب، بالترتيب AB إذا كـــان عدد أعمدة A مساوياً لعدد صفوف B (لاحظ أن في هذه الحالـــة لـــيس مـــن الضروري إمكان ضرب A في B بالترتيب BA).

4-قواعد أخرى:

(1)إذا كانت A مصفوفة مربعة درجتها n ، فإن `A + A مـــصفوفة متماثلة.

(2)إذا كانت A مصفوفة مربعة درجتها n ، فإن `A − A مـــصفوفة متماثلة ملتوية.

(3)يمكن كتابة كل مصفوفة مربعة A كمجموع مصفوفتين احداهما متماثلة $B = \frac{1}{2}(A + A')$ والأخرى متماثلة ملتوية $C = \frac{1}{2}(A - A')$

(4)يساوي مبدول مجموع مصفوفتين مجموع مبدوليهما، أي أن

(A + B)` = A` + B`

(5)إذا كان K أي عدد، فإن (KA)` = K A`

(6)يساوي مبدول حاصل ضرب مصفوفتين حاصل ضرب المبدولين بعد تغير ترتيبهما، أي أن (AB)` = B`A`

(7)إذا كانت B,A مصفوفتين لهما مقلوب، فإن مقلوب حاصل ضربهما يساوي حاصل ضرب مقلوبيهما بعد تغيير ترتيبهما، أي أن:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}\, A^{-1}$$

رابعاً: المصفوفة المصاحبة للمصفوفة المربعة:

1-محدد المصفوفة المربعة:

لكل مصفوفة مربعة محدد تتكون عناصره من عناصر هذه المــصفوفة – ارجع للفصل الأول من هذا القم لمرجعة خصائص المحدادت. ويرمز لمحدد المصفوفة المربعة A بالرمز $|A|$. ويقال إن المصفوفة المربعة منفــردة singular إذا كـــان محددها يساوي الصفر أي إذا كان $|A| = o$ ويقال أنها غير منفــردة إذا كـــان $|A| \neq o$

2-المصفوفة المصاحبة (أو مصفوفة المرفقات) Adjoint:

إذا كانت $A = [a_{jj}]$ مصفوفة مربعة درجتها n و a_{jj} كـــان مرافــق العنصر a_{jj} فإن المصفوفة المصاحبة هي:

$$(٢-١) \quad \text{adjoint } A = \text{adj } A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

لاحظ أن مرفقات عناصر الصف (أو العمود) رقم i من المصفوفة A هي عناصر العمود (أو الصف). رقم i من المصفوفة المصاحبة للمصفوفة A، أي أننـــا للحصول على المصفوفة المصاحبة A، نحل في A كل عنصر بالمحدد المرافق له، ثم نأخذ مبدول هذه المصفوفة الجديدة.

مثال : إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ نحصل على المصفوفة المصاحبة لها

كما يلي: نحسب أولاً مرافق كل عنصر من عناصرها.

$$\alpha_{11} = 6 \quad , \alpha_{12} = -2 \quad , \quad \alpha_{13} = -3$$

$$\alpha_{21} = 1 \quad , \alpha_{22} = -5 \quad , \quad \alpha_{23} = 3$$

$$\alpha_{31} = -5 \quad , \alpha_{32} = 4 \quad , \quad \alpha_{33} = -1$$

ثم نحل كل عنصر من A بالمحدد المرافق له أي تكون:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

وأخيراً، فالمصفوفة المصاحبة هي مبدول المصفوفة السابقة، أي أن:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

3- مقلوب المصفوفة:

بينا أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين بحيث أن $AB = BA = I$ فإن B تسمى بمقلوب A ونكتب $B = A^{-1}$ كما أن A مقلوب B أي $A = B^{-1}$

لكل مصفوفة مربعة غير منفردة مقلوب، أي إذا كانت A مصفوفة مربعة بحيث أن $|A| \neq 0$ ، فيمكن إيجاد مقلوب لهذه المصفوفة.

وإذا كان للمصفوفة A مقلوب، فإنه يكون وحيداً.

وأخيراً إذا كانت A غير منفــردة $AB = AC$ يعــني أن $B = C$.

لإثبات ذلك، تذكر أن لأية مصفوفة غير منفردة مقلوب وبالتالي إذا كانت $AB = AC$ فإن $A^{-1} AB = A^{-1} AC$ أي أن $IB = IC$ ومنها $B = C$

توجد عدة طرق لحساب مقلوب المصفوفة، ولكننا سوف نقتصر هنا على بيان طريقة قلب المصفوفة باستخدام المصفوفة المصاحبة.

إذا كانت A غير منفردة، فإن:

$$(1-3) \quad A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}/|A| & \alpha_{21}/|A| & \cdots & \alpha_{n1}/|A| \\ \alpha_{12}/|A| & \alpha_{22}/|A| & \cdots & \alpha_{n2}/|A| \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n}/|A| & \alpha_{2n}/|A| & \cdots & \alpha_{nn}/|A| \end{bmatrix}$$

أي لحساب مقلوب المصفوفة A^{-1} نوجد المصفوفة المصاحبة للمصفوفة A ثم نقسمها على محدد A.

مثال: بينا في المثال السابق أن المصفوفة المصاحبة للمصفوفة A التالية:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ هي } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

من السهل إيجاد محدد A إذ أنه:

$$|A| = 1(6) - 2(2) + 3(-3) = 6 - 4 - 9 = -7$$

وبالتالى فإن :

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|} = \begin{bmatrix} -6/7 & -1/7 & 5/7 \\ 2/7 & 5/7 & -4/7 \\ 3/7 & -3/7 & 1/7 \end{bmatrix}$$

خامساً: المعادلات الخطية والمصفوفات:

سوف نقتصر هنا على دراسة حالة n من المعادلات الخطية الآتيــة في n من المتغيرات، أي أننا لن نهتم هنا ببحث الحالة التي يختلف فيها عدد المعادلات عن عدد المتغيرات.

بينا في من قبل في المحددات أنه يمكن كتابة مجموعة n من المعادلات في n من المتغيرات في الصورة:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \qquad (١-٢-١)$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

حيث a_{jj} معاملات المتغيرات و b_i ثوابت المعادلات $(I,j = 1,2,\dots,n)$

باستخدام المصفوفات، يمكن كتابة (1-2-1) في الصورة التالية

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (١-٢)$$

أو باختصار : $AX = B$ (٢ - ٢)

حيث $A = [a_{ij}]$ مصفوفة المعاملات ، $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]'$ موجه المتغيرات

وأخيرا $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]'$ موجه الثوابت .

1- المعادلات غير المتجانسة:

يقال أن معادلة خطية:

$$A_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

غير متجانسة إذا كان $b \neq 0$. وبالمثل يقال إن مجموعة معادلات آتية

$AX = B$ غير متجانسة إذا كان الموجه B مختلفاً عن الصفر. وقد بينا في الفصل الخاص بالمحددات إنه يمكن في هذه الحالة إيجاد حل لهذه المعادلات باستخدام قاعدة كرامر إذا كان محدد المعاملات مختلفاً عن الصفر أي إذا $|A| \neq 0$ ويكون الحل عندئذ:

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

حيث $|A|$ محدد المعاملات و $|A_j|$ المحدد الذى نحصل عليه باحلال عمود الثوابت محل العمود رقم j فى محدد المعاملات .

ويمكن أيضا إيجاد حل لهذه المعادلات بتطبيق طريقة مقلوب المصفوفة.
أي باستخدام A^{-1}. فإذا كان $A \neq 0$ ، فـيمكن قلـب مـصفوفة المعاملات A ويكون حل المعادلات (2-2) كما يلي:

$$A^{-1} . AX = A^{-1}B$$

أو

$$X = A^{-1}B \qquad (3-2)$$

مثال:

إن مصفوفة معاملات المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

هى : $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ وقد حسبنا مقلوبها فى مثال سابق

فوجدنا أنه

$$A^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{vmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

وبالتالى فإن :

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 54 + 6 - 40 \\ -18 - 30 + 32 \\ -27 + 18 - 8 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 20 \\ -16 \\ -17 \end{bmatrix}$$

أى أن :

$$[x_1, x_2, x_3]' = [-20/7, \; 16/7, \; 17/7]'$$

فحل المعادلات هو اذن :

$$x_1 = -20/7 \;, \quad x_2 = 16/7 \;, \quad x_3 = 17/7$$

2- المعادلات المتجانسة:

يقال أن المعادلة الخطية التالية:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = o$$

متجانسة، وبالمثل يقال أن مجموعة المعادلات التالية:

$$A X = O$$

(3-2)

متجانسة. لاحظ أن $X = O$ أي $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = o$ دائماً حلاً لهذه المعادلات.

(أ) إذا كان $A = o$ فإن $X = O$ هو الحل الوحيد للمعادلات (3-2) إذ أنه في هذه الحالة يمكن قلب A وبالتالي فإن $A^{-1}A X = A^{-1}O$ أو $X = O$.

(ب) إذا كان $A = O$ فمعنى ذلك أن معادلات (3-2) ليست مستقلة عن بعضها البعض – كما بينا في الفصل الأول – وبالتالي يمكن الاستغناء عن المعادلات غير المستقلة وليكن عددها r، فيبقى لنا $n - r$ من المعادلات المستقلة، يمكن استخدامها للحصول على قيمة $n - r$ من المتغيرات بدلالة العدد المتبقي منها وهو r.

تمرينات (2)

٣ـ١ إذا كان لدينا المصفوفتان :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

فالمطلوب حساب :

(أ) $A + B$ (جـ) $3A$

(ب) $A - B$ (د) $-A$

٣ـ٢ إذا كان $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ أوجد $D=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}$

بحيث أن $A + B - D = O$

٣ـ٣ أوجد حواصل الضرب التالية :

(أ) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & -6 & 7 & 10 \\ 0 & -9 & 10 & 7 \\ 3 & 8 & -9 & -8 \end{bmatrix}$

٣ـ٤ أوجد مقلوب المصفوفتين التاليتين :

(أ) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

3-5 أوجد حلول لمجموعة المعادلات الآنية التالية باستخدام طريقة مقلوب المصفوفة:

(أ)

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 \qquad + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(حـ)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 &= 5 \end{aligned}$$

الفصل الثاني

توازن السوق في حالة المنافسة الكاملة

نتناول في هذا الفصل توازن في حالة المنافسة الكاملة في سوق سلعة واحدة فنبين خصائصه وشروطه استقراره كما نبين اثر الضرائب و أعانات الانتاج على هذا التوازن و هذا النوع من التحليل يعرف باسم تحليل التوازن الجزئي للسوق حيث يتم الاقتصار على سوق سلعة واحدة مع افتراض بقاء اسواق السلع الاخرى على ما هو عليه .

-1-

سوق المنافسة الكاملة في تحليل التوازن الجزئي للسوق

أولاً: شروط المنافسة الكاملة :

يقال أن سوق سلعة ما كاملة المنافسة إذا تحققت لها مجموعة من الشروط وهي على النحو التالي:

1- تجانس السلعة المنتجة.

2- تعدد البائعين و المشترين بحيث لا يستطيع احدهم بفرده التأثير على الاسعار.

3- توافر المعرفة التامة باحوال السوق وخاصة بالسعر السائد.

4- حرية البائعين و المشترين في دخول السوق او الخروج منها .

ويضمن توافر هذه الشروط ان يسود السوق سعر واحد وهو ذلك السعر الذي يتعادل عنده عروض البيع مع طلبات الشراء أو هو الذي يحقق آنيا دالة الطلب ودالة العرض.

ثانياً: النموذج: يفسر النموذج الاقتصادي ظاهرة اقتصادية معينة ويعبر عنها في صورة مجموعة من الدوال تبين العلاقات بين عناصر الظاهرة التي تمحل بدورها في صورة متغيرات وابسط انواع النماذج هي الخطية. وهي النماذج التي

تكون جميع العلاقات التي تربط المتغيرات المختلفة فيها متغيرات خطية، وللنماذج أهمية عملية حيث من السهل تقدير معالمها بوضوح.

فيما يلي نموذجا خطيا لسوق سلعة واحدة ويتكون النموذج من ثلاث علاقات دالة الطلب ودالة العرض وشرط التوازن، وترمز للمتغيرات الكميات المطلوبة والمعروضة والسعر بالرموز على التوالي:

دالة الطلب : $x^d = a + bp$

دالة العرض: $x^s = c + dp$

شرط التوازن: $x^d = x^s$

حيث ان (P) تمثل السعر، xs الكمية المعروضة، xo الكمية المطلوبة.

a, **b,c,d هي معلمات النموذج ويمكن افتراض :**

b<0 حيث ان دالة الطلب سالبة لتدل على العلاقة العكسية بين السعر والكمية المطلوبة .

أي أن كلما زاد السعر قلت الكمية المطلوبة وكلما قل السعر زادت الكمية المطلوبة. أي أن دالة الطلب متناقصة في السوق.

d>0 حيث ان دالة العرض موجبة لتدل على العلاقة الطردية بين السعر والكمية المعروضة . وأي كلما زاد السعر زادت الكمية المعروضة وكلما قل السعر قلت الكمية المعروضة أي أن دالة المعرض تتزايد مع السعر كل ذلك في ظل الأحوال العادية.

حل نموذج التوازن العام في ظل المنافسة الكاملة لكي يتم حل النموذج لابد لنا أن نبحث في موضوعية هي الشروط اللازمة للتوازن، الشروط الكامنة للحصول على التوازن وكل ذلك بشكل مقبول.

ثالثاً: الشروط الازمة للتوازن في ظل المنافسة الكاملة:

1- الشرط الازم للتوازن : بافتراض ان $d>0$, $b<0$ وسبب عدم افتراضنا أن إمكانية أن تصل إلى حل فهو أن التوازن يمكن حل النموذج لتحقيق الشروط اللازمة للتوازن بما يلي:

سبق أن ذكرنا أن

$$xd = a + 6p \quad (1)$$

$$Xs = c + dp \quad (2)$$

$$Xd = s$$

بالتعويض عن xd . xs في المعادلة 1، 2

$$a + 6p = c + dp$$

$$p = \frac{a - c}{D - b} \quad (3)$$

وبالتعويض عن قيمة p في المعادلة 2/1

$$xd = a + \frac{b(d - bc)}{d - b} = \frac{d - bc}{d - b}$$

$$xs = c + d\frac{a - c}{d - b} = \frac{ad - bc}{d - b}$$

$$Xd = xs = x = \frac{ad - bc}{d - c} \quad (4)$$

إذن يتبين لنا من المعادلة 3، 4 نجد أن

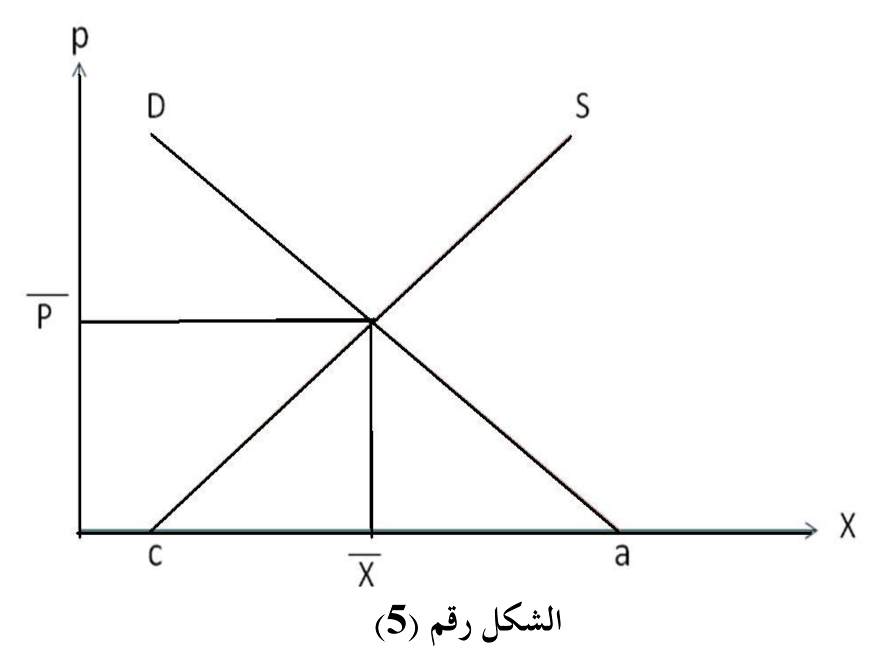
بالتالي $d \neq b$ هذا هو الشرط الازم لاحداث التوازن .

2- الشرط الكافي للتوازن : هو الوضع الذي يعطي قيما موجبة للسعر والكمية وبالتالي فشرط ان يكون السعر التوازني (p) يكون موجبا هو $a>c$.

بالاضافة الي ان $d>0$, $b<0$ اي ان $d > b$ وان $c>0$ يعني ان $ad > bc$ اي ان الكمية التوازنية (X) موجبة .

هذه الشروط معاً تضمن ان يكون السعر التوازني والكمية التوازنية موجبين. $a<c$, $b<0$, $d>0$.

توازن السوق:



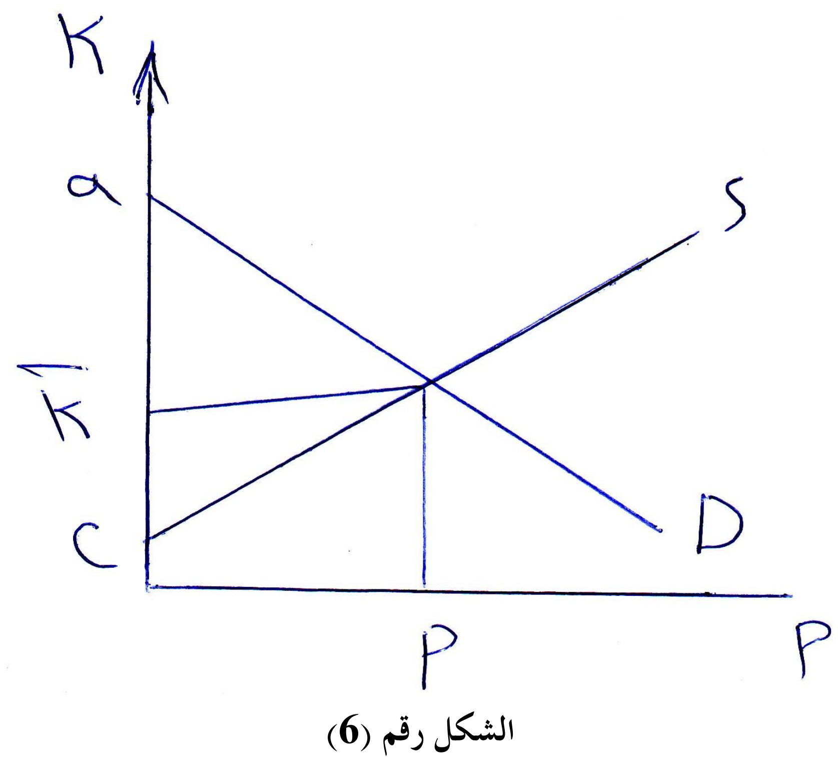
الشكل رقم (5)

حيث ان a تمثل الجزء الثابت من دالة الطلب وان cتمثل الجزء الثابت من دالة العرض .

السعر التوازني: $$P = \frac{a - c}{d - b}$$

الكمية التوازنية: $$P = \frac{ad - bc}{d - b}$$

ودائما وأبدا لابد أن تكون الكمية المعروضة موجبة، والكمية المطلوبة متغيرة إذ لا معنى لسعر سالب أو كمية معروضة سالبة ومن الشكل التالي يتضح لنا:



الشكل رقم (6)

يتبين من الشكل السابق أن منحنى العرض s يجب أن يقطع المحور الـــرأس عند الكمية c أقل من الكمية a والتي يقطع عندها منحنى الطلب p المحور الرأسي وأن الكمية a على الأقل يجب أن تكون موجبة وبالتالي فشرط أن يكون p موجبا هو $a>C$

وأن $ad> bc$

أي أن الكمية x موجبة أيضاً

وهذه الشروط معاً تضمن أن يكون السعر التوازني والكميـــة التوازنيـــة موجبتين

مثال 1: إذا اعطيت البيانات التالية:

دالة الطلب $x^d = 10 - 0.5\,p$

دالة العرض $x^s = 2 + p$

المطلوب : ايجاد كل من السعر التوازني و الكمية التوازنية.

$$\bar{P} = \frac{a-c}{d-b} = \frac{10-2}{1-(-0.5)}$$

$$\bar{P} = \frac{8}{1.5} = 5.3$$

$$\bar{X} = \frac{ad-bc}{d-b}$$

$$\bar{X} = \frac{10 \times 1 - (-0.5) \times 2}{1-(-0.5)}$$

$$\bar{X} = \frac{11}{1.5} = 7.3$$

$$X^d = X^s$$

$$10 - 0.5\,p = 2 + p$$

$$10 - 2 = p + 0.5\,p$$

$$8 = 1.5\,p$$

$$\bar{P} = \frac{8}{1.5} = 5.3$$

بالتعويض في اي من المعدلتين

$$\bar{X} = 10 - 0.5\,p$$

$$\bar{X} = 10 - 0.5 \times 5.3$$

$$\bar{X} = 10 - 2.7 = 7.3$$

-2-

ضرائب الانتاج واثرها على توازن السوق المنافسة الكاملة:

يمكن التفرقة بين نوعين من ضرائب الانتاج هما : ضريبة الانتاج النوعية وضريبة الانتاج القيمية .

1- ضريبة الانتاج النوعية :عبارة عن فرض مبلغ معين على كل وحدات الانتاج .

فإذا كانت السلعة النتيجة زجاجة مياه غازية فإن الضريبة النوعية تفرض بقيمة عشرون قرشاً على كل عليه.

2- الضريبة الانتاج القيمية: فهى فرض نسبة معينة على سعر كل وحدة من وحدات الانتاج.

أولاً: الضريبة النوعية للإنتاج:

1- أثر الضريبة النوعية على توازن السوق:

تفرض على المُنتَج بشكل ثابت وترفع السعر التوازني .

فعند فرض الضريبة النوعية تظل دالة الطلب على ما كانت عليه

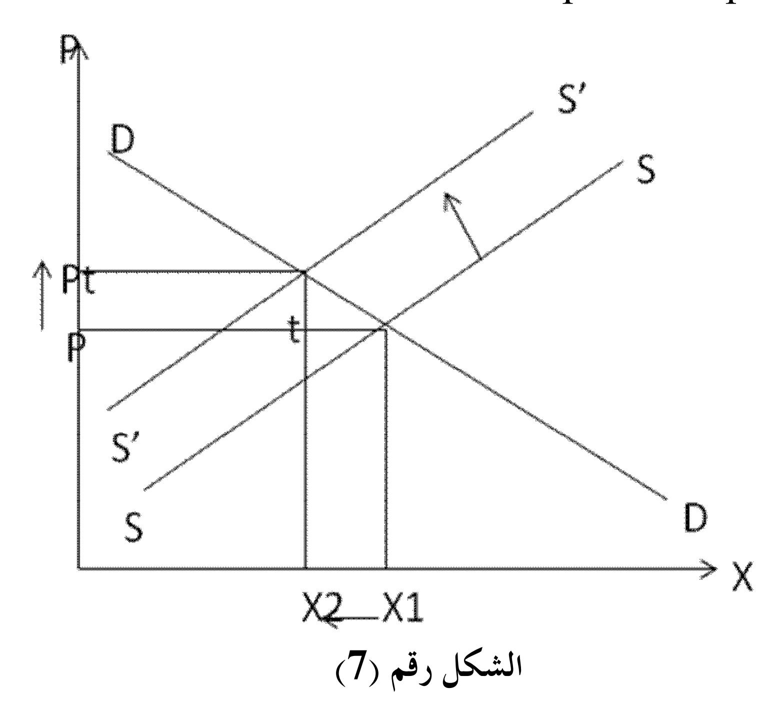
$$X^d = a + bp$$

وتصبح دالة العرض $X^s = c + d\, p^t$

حيث ان pt السعر الذي يحصل عليه المنتج بعد دفع الضريبة وهو اقل من سعر السوق بمقدار t $p^t = p - t$

$$X^d = X^s$$

$$a + bp = c + dp - dt$$



الشكل رقم (7)

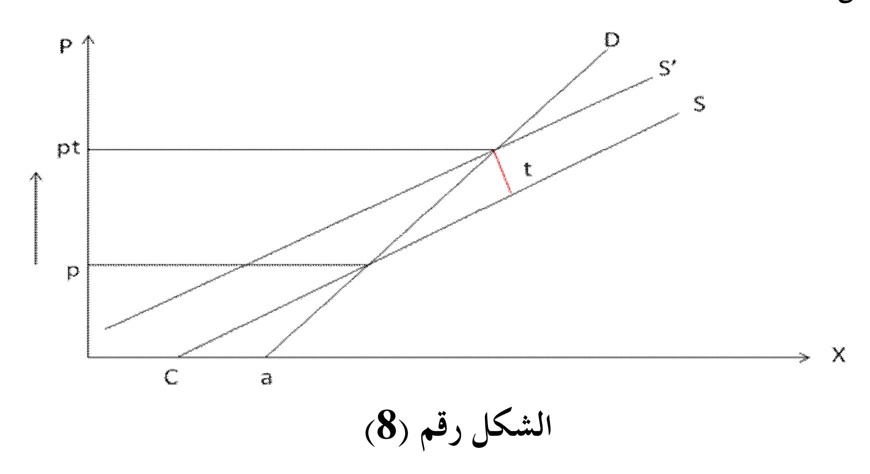
يلاحظ من الشكل السابق ان عند فرض الضريبة النوعية فانها تؤثر فقط على دالة العرض وبالتالي منحى العرض وان تظل دالة الطلب على حالها اي يظل منحنى الطلب كما هو .

فيلاحظ انتقال منحنى العرض الي اعلي مما يعنى انخفاض الكمية المعروضة مع ثبات الكمية المطلوبة وبالتالي ارتفاع السعر التوازني بمقدار الضريبة المفروضة على المنتج .

2- حالات أثر الضريبة النوعية على سعر التوازن

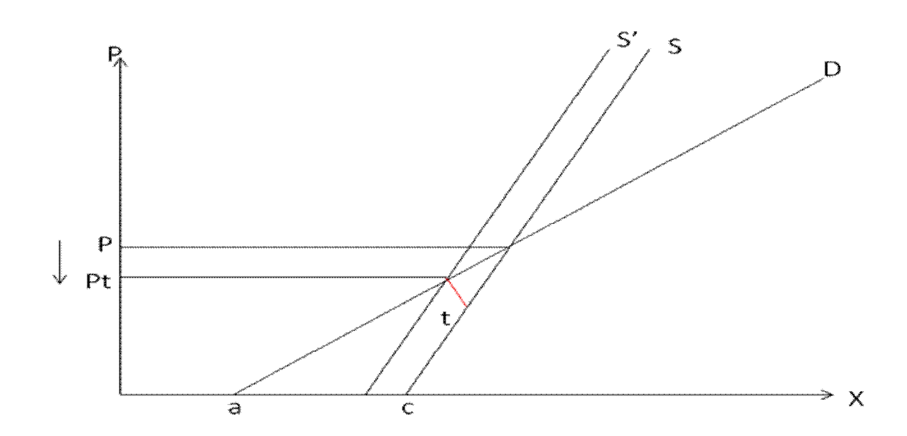
اذا كان ميل منحنى الطلب موجباً $b<0$

أ- حالة $b< d$ وكانت $a>c$ ويؤدي فرض الضريبة الى رفع السعرالتوازني و بمقدار اكبر من الضريبة نفسها ويكون ميل الطلب أكبر من ميل العرض:



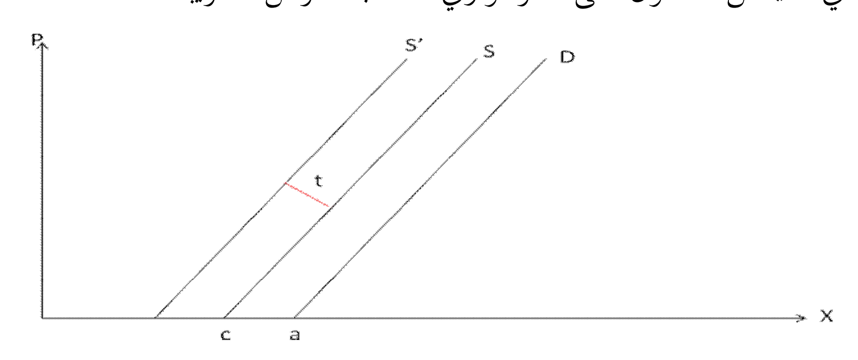
الشكل رقم (8)

ب- حالة $b>d$ وكانت $a<c$ ويؤدي فرض الضريبة الي خفض السعر التوازني ويكون ميل الطلب اقل من ميل العرض:



الشكل رقم (9)

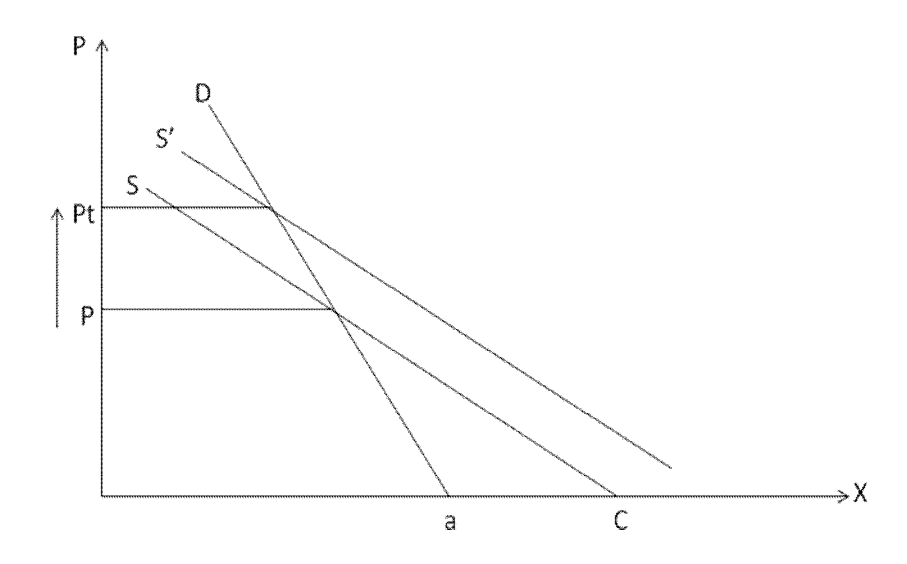
جـــ - حالة $b = d$ و $a \neq c$ اي ان ميل الطلب يساوي ميل العرض وبالتالي لا يمكن الحصول على سعر توازني محدد بعد فرض الضريبة:



الشكل رقم (10)

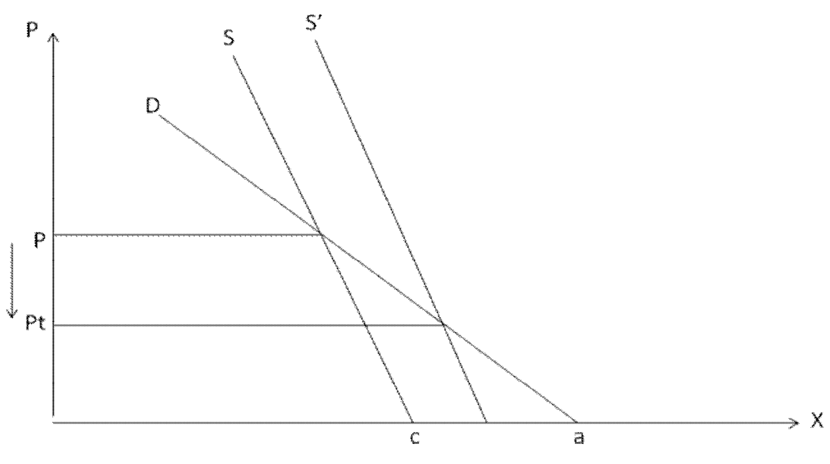
اذا كان ميل منحنى العرض سالباً $d < 0$:

أ- حالة $b<d$ ويكون ميل الطلب اكبر من ميل العرض وبأفتراض ان $a<c$ وبالتالي تؤدي الضريبة الى رفع السعر التوازني :



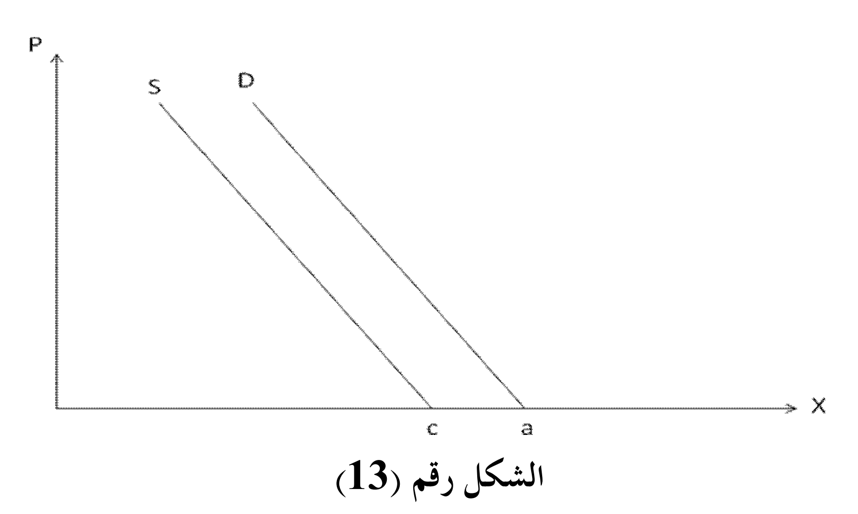
الشكل رقم (11)

ب - حالة b>d ويكون ميل الطلب اقل من ميل العرض وبأفتراض ان a>c وبالتالي تؤدي الضريبة الى خفض السعر التوازني:



الشكل رقم (12)

جـــ - حالة b = d وان ميل الطلب يساوي ميل العرض وبالتالي لا يمكن تحديد سعر توازني:



الشكل رقم (13)

3- حصيلة الضريبة ومعدل الضريبة النوعية الامثل: تتوقف حصيلة الضريبة على معدل الضريبة t وعلى الكمية المباعة من السلعة X

حصيلة الضريبة : $T = t\,X$

هذه الحصيلة تتزايد عند زيادة معدل الضريبة الى حد معين ثم تاخذ في التناقص وذلك اذا ارتفع معدل الضريبة الى حد يؤدي الى انكماش المبيعات .

السعر التوازني بعد فرض الضريبة :

$$p = \frac{a - c}{d - b} + \frac{d}{d - b}\,t$$

المبيعات المحققة عند هذا السعر :

$$X = X^d = a + b\,p = \frac{ad - bc}{d - b} + \frac{bd}{d - b}\,t$$

حصيلة الضريبة :

$$T = t\,X = \frac{ad - bc}{d - b}\,t + \frac{bd}{d - b}\,t^2$$

مثال 2 : اذا كانت لديك البيانات التالية :

دالة الكمية المطلوبة $X^d = 10 - p$

دالة الكمية المعروضة $X^s = 2p - 5$

المطلوب :

1. ايجاد كل من سعر التوازني والكمية التوازنية.
2. اذا فُرضت ضريبة نوعية بمعدل 1 جنيه للوحدة المباعة أوجد القيم التوازنية الجديدة.
3. احسب معدل الضريبة الامثل ، السعر و الكمية المقابلين ، الحصيلة الضريبية .

الحل

1. **التوازن عند تحقق شرط التوازن** $X^d = X^s$

$10 - P = 2P - 5$

$10 + 5 = 2P + P$

$\bar{P} = 15/3 = 5$

- **بالتعويض في اى من دالة الطلب او دالة العرض للحصول على الكمية التوازنية**

$X^d = 10 - P$

$X^d = 10 - 5$

$\bar{X} = 5$

2. **عند فرض ضريبة نوعية بمعدل 1 جنيه**

$Xd = 10 - P$

$Xs = 2 (P - t) - 5$

- **السعر التوازني الجديد**

$Xd = Xs$

$10 - P = 2 (P - 1) - 5$

$10 - P = 2 P - 2 - 5$

$10 + 2 + 5 = 2P + P$

$17 = 3 P$

$\overline{P} = 17/3 = 5.667$

- **بالتعويض في اى من دالة الطلب او دالة العرض للحصول على الكمية التوازنية**

$Xd = 10 - P$

$Xd = 10 - 5.667$

$\overline{X} = 4.333$

3. **حساب معدل الضريبة الامثل :**

$T = t x$

- **السعر التوازني**

$Xd = Xs$

$10 - P = 2(P - t) - 5$

$10 - P = 2 P - 2 t - 5$

$10 + 5 = 2 P + P - 2 t$

$15 = 3 P - 2 t$

$\overline{P} = 5 + 2/3 t$

- **بالتعويض في اى من دالة الطلب او دالة العرض للحصول على الكمية التوازنية**

$X^d = 10 - P$

$X^d = 10 - (5 + 2/3 t)$

$\overline{X} = 10 - 5 - 2/3 t$

$\overline{X} = 5 - 2/3 t$

الحصيلة الضريبية

$T = tx$

$T = t(5 - 2/3\,t)$

$T = 5t - 2/3\,t^2$

وبتفاضل الدالة بالنسبة t

$$\frac{dT}{dt} = 5 - 4/3\,t = 0$$

$4/3\,t = 5$

$t = 5 \times 3/4$

وهذا يمثل المعدل الامثل للضريبة اي هو المعدل الذي يؤدي الى اقصي قيمة للضريبة $t = 15/4$

$= 3.75$

يكون السعر التوازني

$P = 5 + 2/3\,t$

$P = 5 + 2/3 \times 3.75$

$P = 7.5$

تكون الكمية التوازنية

$X = 5 - 2/3\,t$

$X = 5 - 2/3 \times 3.75$

$X = 2.5$

تكون الحصيلة الضريسة

$T = t\,x$

$T = 3.75 \times 2.5$

$T = 9.375$

ثانياً: الضريبة القيمية للإنتاج:

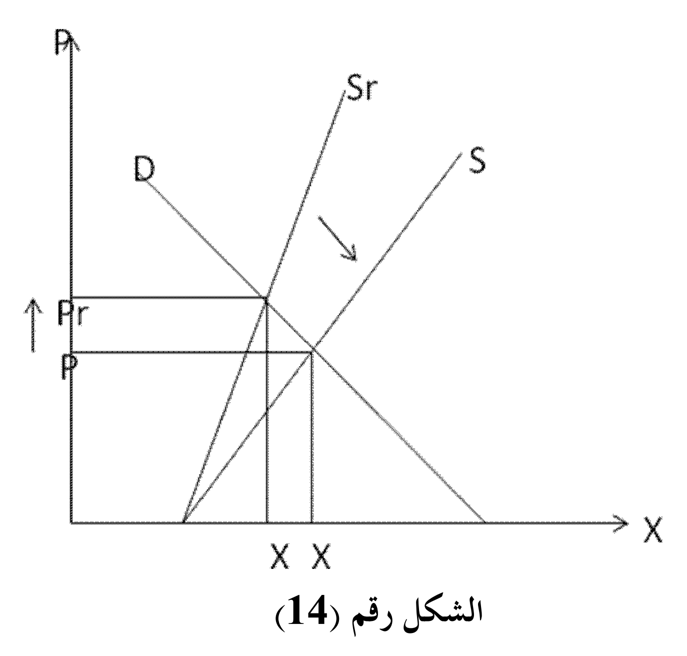
1- أثر الضريبة القيمية : تتمثل في فرض نسبة معينة على سعر كل وحدة من وحدات الانتاج فاذا كانت النسبة المئوية للضريبة الى سعر الوحدة r وكان السعر قبل الضريبة هو p فيصبح السعر الذي يحصل عليه البائع بعد الضريبة هو p^r حيث : $p^r = p\,(I - r\,)$

وتصبح دالة العرض بعد فرض الضريبة $X^s = c + d\,p^r$

وتظل دالة الطلب كما هي حيث تؤثر الضريبة على دالة العرض فقط. $X^d = a + bP$

شرط التوازن : $X^d = X^s$

أثر فرض الضريبة القيمية



الشكل رقم (14)

يلاحظ من الشكل ان فرض الضريبة بنسبة مئوية ثابتة من السعر يعني فرض ضريبة بمقدار متزايد مع سعر العرض فيتضح ان مقدار الضريبة يساوي صفر عندما يكون السعر صفراً ويزيد مقدار الضريبة كلما ارتفع سعر بيع الوحدة .

سعر التوازن بعد فرض الضريبة :

$$P = \frac{a - c}{d - b - dr}$$

الكمية التوازنية بعد فرض الضريبة:

$$X = a + b\frac{a - c}{d - b - dr}$$

مثال: اذا كان لديك البيانات التالية :

- دالة الطلب : $X^d = 10 - P$
- دالة العرض: $X^s = 2P - 5$
- شرط التوازن : $X^d = X^s$

المطلوب :

1. تحديد القيم التوازنية لهذا النموذج .
2. بيان اثر فرض ضريبة قيمية بمعدل 25% على سعر الوحدة المباعة على كل من السعر التوازني و الكمية التوازنية.
3. تحديد معدل الضريبة القيمية الذي يعادل في اثره على التوازن معدل الضريبة النوعية الامثل .

الحل

1. التوازن :

$X^d = X^s$

$10 - P = 2P - 5$

$10 + 5 = 2P + P$

$15 = 3P$

$P = 5$

بالتعويض في اي من المعدلتين للحصول على الكمية التوازنية :

$X = 10 - P$

$X = 10 - 5$

$X = 5$

2. عند فرض ضريبة 25% من سعر الوحدة

$X^s = 2P (1 - r) - 5$

$X^s = 2P (1 - 0.25) - 5$

$X^s = 2P \times 0.75 - 5$

$X^s = 1.5 P - 5$

- تظل دالة الطلب كما هي

$X^d = 10 - P$

- شرط التوازن

$X^d = X^s$

$10 - P = 1.5 P - 5$

$10 + 5 = 1.5 P + P$

$15 = 2.5 P$

$P = 6$

- بالتعويض في اي من دالة الطلب او دالة العرض للحصول على الكمية التوازنية

$X^d = 10 - P$

$X = 4$

- يترتب على فرض الضريبة زيادة سعر التوازن من 5 جنيه الي 6 جنيه و بالتالي تقل الكمية التوازنية من 5 وحدات الى 4 وحدات .

3. من المثال السابق على الضريبة النوعية كانت الكمية التوازنية والسعر التوازني المناظرة لمعدل الضريبة النوعية الامثل .

$P = 7.5$

$X = 2.5$

وعند فرض ضريبة قيمية تصبح دالة العرض

$X^s = 2P (1 - r) - 5$

وبالتعويض $P = 7.5 \quad , X = 2.5$

- يمثل r معدل الضريبة القيمية الامثل الذي يعادل في اثره على التوازن معدل الضريبة النوعية الامثل

$X^s = 2P (1 - r) - 5$

$2.5 = 2 \times 7.5 (1 - r) - 5$

$2.5 = 15 (1 - r) - 5$

$2.5 + 5 = 15 (1 - r)$

بالقسمة على 15 $7.5 = 15 (1 - r)$

$0.5 = 1 - r$

$r = 0.5$

ان معدل الضريبة القيمية الامثل = 50% من السعر

ان الحصيلة الضريبة القيمية تساوي حصيلة الضريبة النوعية

$T = t X$ $\qquad t = r P$

$T = r p X$

$T = 0.5 \times 7.5 \times 2.5$

$T = 9.375$

-3-

الإعانات

يمكن اعتبار إعانة الإنتاج بمثابة ضريبة سالبة، تضاف إلى سعر العرض بدلا من أن تطرح منه، وبالتالي، يمكن معالجتها بنفس الطريقة التي تناولنا بها حالة الضرائب. وفي الحالات العادية يؤدي منح إعانة إنتاج إلى تخفيض سعر التوازن ورفع الكمية التوازنية وذلك بعكس أثر الضريبة.

أولاً: استقرار التوازن: أشرنا فيما سبق إلى أن توازن السوق يتحقق عندما تتعادل الكمية المعروضة من السلعة مع الكمية المطلوبة منها أو باستخدام لغة مارشال عندما يكون سعر الطلب مساويا لسعر العرض.

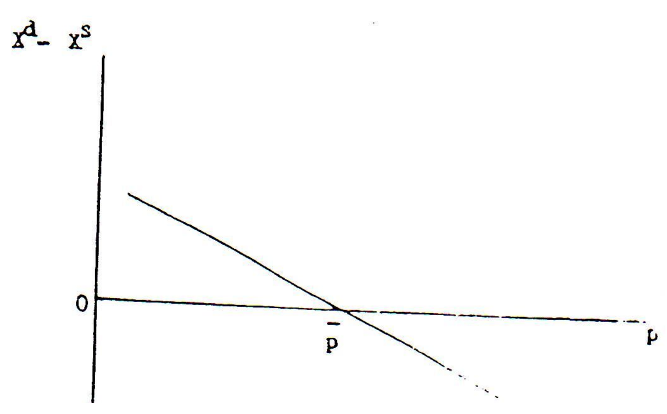
ويقال أن توازن السوق مستقر إذا وجدت قوى تدفع بالسوق إلى التوازن إذا ابتعد عنه لسبب أو لآخر.

فإذا تبنينا فرض فالراس الخاص بقانون تغير السعر وهو أن معدل تغير السعر مع الزمن دالة في فائض الطلب – وإذا افترضنا، للتبسيط، أن معدل تغير السعر يتناسب تناسبا طرديا مع فائض الطلب، أي أن:

$$\frac{dp}{dt} = k\,(X_d - X_a) \qquad (1-5)$$

حيث $k > o$. فيمكن إثبات ان توازن السوق مستقر في هذه الحالة بمعنى أن قوى السوق تضمن عودة السوق إلى مستوى التوازن إذا ابتعد عنه، وذلك إذا كان $o < d - b > o$، أي إذا كان ميل منحنى العرض أكبر جبرياً من ميل منحنى الطلب ($d > b$) وبطريقة أخرى يمكن القول أنه إذا استجاب السعر لفائض الطلب بحيث أنه يرتفع بمرور الزمن عندما يكون فائض الطلب موجبا (أي إذا زاد الطلب عن العرض) وينخفض عندما يكون فائض الطلب سالبا (أي إذا زاد العرض عن الطلب) فإن توازن السوق يكون مستقرا إذا كان فائض الطلب سالبا عند

الأسعار الأكبر من سعر التوازن، وكان موجبا عند الأسعار الأقل من هذا السعر، أي إذا كانت العلاقة بين فائض الطلب والسعر كما في الشكل التالي:



شكل رقم (15) : فائض الطلب في حالة استقرار التوازن

لاحظ أنه من (2-1) و (2-2) يمكن كتابة دالة فائض الطلب كما يلي:

$$X^{d} - X^{s} = (a - c) + (b-d)\, p$$

وشرط استقرار التوازن (أي : $d - b > o$) يشير إلى أن ميل خط فائض الطلب بالنسبة للسعر يجب أن يكون سالبا حتى يتحقق استقرار توازن السوق.

تمرينات (1)

1-أوجد السعر التوازني والكمية التوازنية في السوق عندما يكون الطلب والعرض كما يلي:

	دالة الطلب	دالة العرض
(أ)	$p = 12 - 5X$	$p = 4 + 4X$
(ب)	$p = 6$	$X = 3p - 3$
(ج)	$8p + 5X = 40$	$p = 2$
(د)	$X = 16 - 2p$	$4X = 4p + p^2$
(هـ)	$X = 130 - 4p$	$p = 10 + \frac{X}{5} + \frac{X^2}{100}$
(و)	$X = 96 - 8p - 2p^2$	$X = 10p + 4p^2$
(ز)	$pX = 30$	$3p - X = 9$
(ح)	$(X+10)(p+20) = 300$	$X = 2p - 8$

2-أجب على ما يلي:

(أ)أوجد السعر التوازني والكمية التوازنية في السوق عندما تكون

دالة الطلب $3P + 2X = 27$

ودالة العرض $6P - 2X = 9$

(ب)إذا فرضت ضريبة بمعدل 1.5 على الوحدة المنتجة، أوجد نقطة التوازن الجديدة واحسب حصيلة الحكومة من هذه الضريبة.

(ج)إذا منحت إعانة بمعدل 1 على الوحدة المنتجة، أوجد نقطة التوازن الجديدة، واحسب الانفاق الحكومي على هذه الإعانة.

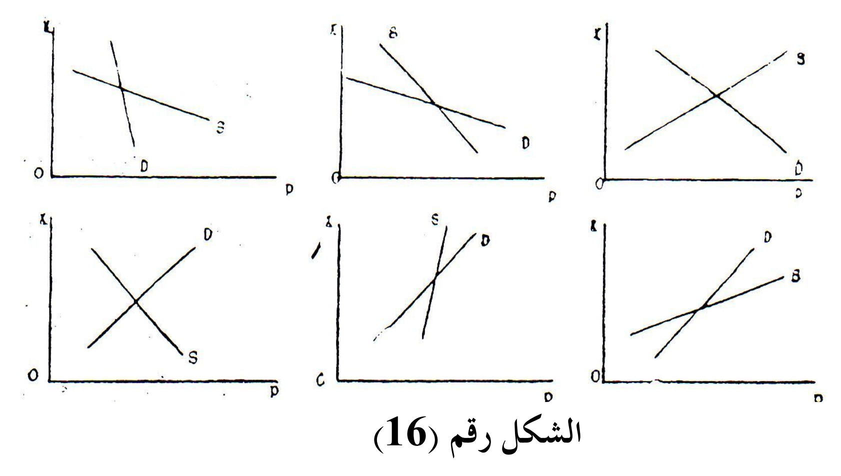
-إذا كانت دالة الطلب $P=39-3X2$ ودالة العرض $P=9X+9$ فاوجد معدل الضريبة اللازم لرفع السعر بمقدار 3، ما هو مقدار الإعانة الذي ينخفض سعر التوازن بمقدار 3؟

-إذ كانت دالة الطلب $9X + 4P = 40$ ودالة العـــرض $9X =$ $P2-4$ وفرضت ضريبة بمعدل 3 وحدات على سعر الوحدة، بـــين أثـــر هـــذه الضريبة على كل من الكمية التوازنية والسعر التوازني.

3-إذا كان الطلب $3P + 2X = 27$ والعـــرض $6P - 2X = 9$ وفرضت ضريبة بمعدل 20% من سعر الوحدة، فالمطلوب إيجاد ســـعر التـــوازن الجديدة وحصيلة الضريبة. ارسم هذه الحالة بيانيا.

إذا كانت دالة الطلب $X = 1200 - 2P$ ودالة العـــرض $X = 4P$ أوجد معدل الضريبة النوعية الذي يعطي أكبر حصيلة ممكنة للضريبة.

4-عين في الأشكال التالية نقط التوازن المستقر ونقط التوازن غير المستقر:



الشكل رقم (16)

-تحقق بيانيا من الأشكال الستة السابقة أن زيادة الطلب تؤدي إلى ارتفاع السعر التوازني عندما يكون التوازن مستقرا وإلى انخفاض السعر عنـــدما يكـــون التوازن غير مستقر. ما هو أثر زيادة الطلب على الكميـــات التوازنيـــة في هـــذه الحالات؟

الفصل الثالث

تحليل جانب العرض ونظرية الإنتاج

نتحدث في هذا الفصل عن تحليل جانب العرض من خلال نظرية الإنتاج من خلال توضيح مجموعة تعاريف ومفاهيم أساسية عن دالة الإنتاج وعن منحنيات الناتج المتساوي، ومنحنيات الإنتاجية الكلية والمتوسطة والحدية، ثم نوضح فيما بعد السلوك الأمثل للمنتج حيث هناك ثلاث أساليب لتحقيق السلوك الأمثل:

الأسلوب الأول: تحقيق أكبر إنتاج عند مستوى ثابت من التكلفة.

الأسلوب الثاني: تحقيق أكبر قدر من الإنتاج بأقل تكلفة.

الأسلوب الثالث: تحقيق أفضل ربح.

تحليل جانب العرض نظرية الانتاج

توازن السوق في جانب الطلب في ظل المنافسة الكاملة يتم بتفاعل قــوى العرض والطلب في الطلب في السوق، وبتحليل عرض السلع نجد أن المحدد الرئيسي للعرض هو الانتاج ويستلزم الانتاج توافرعدد من عوامل الانتاج المختلفة وذلــك للحصول على السلع والخدمات المطلوبة، وبالتالي إتمام السلع والخدمات المطلوبة.

ويتوقف اختيار التوليفة المثلى لعوامل الانتاج وتحديد كمية ونوع الإنتاج بحيث يحدث توازن المنتج في ظل التحليل الاقتصاد التقليدي على مجموعــة مــن الفروض تتمثل في :

-وجود عدد لانهائي من الانشطة الانتاجية لانتاج كل سلعة.

-تجانس عوامل الانتاج.

-قابلية السلع للتجزئة.

-أن المنتج يستطيع شراء أيه كمية من عوامل الإنتاج بأسعار الثابتة.

ولابد لنا أن نوضح بأن فهمنا للتحليل التقليدي لنظرية الإنتـــاج يعتـــبر خطوة أساسية وهامة في سبيل فهم الدراسات الحديثة للعلاقات الإنتاجيـــة الـــتي تتناول تحليل المستخدم والمنتج بوجه خاص وتحليل النشاط بوجه عام.

-1-

دالة الانتاج :Production Function

توضح دالة العلاقة بين الكمية المنتجة من السلع والخدمات كمتغير تـــابع ومجموعة عناصر الانتاج المستخدمة كمتغيرات مستقلة وترتبط الكميـــة المنتجـــة بمستلزمات إنتاجها من عناصر أولية بعلاقات دالية تسمى دالة الإنتاج، وللتبـــسيط نقتصر التحليل على حالة عنصرين من عناصر الانتاج وهما العمل و رأس المـــال، ولابد لنا أن نذكر أن هناك جهود كبيرة بذلت ابتداءً من الثلاثينيات لتقدير صيغة دوال الإنتاج لمنشآت مختلفة بإستخدام بيانات حقيقية وفعلية ومن الصيغ الشهيرة لدالة الإنتاج دالة إنتاج كوب دوجلاس، ولابد لنا أن نوضح أيضاً أن تمثيلنا سوف يقتصر على عنصرين فقط من عناصر الإنتاج هما العمل ورأس المال وبالتالي تكون دالة الإنتاج هي العمل، ورأس المال:

$$X = f(q_L , q_k)$$

حيث : q_L: المدخلات من العمل .

q_k: المدخلات من رأس المال. X: كمية الانتاج .

ونفترض ان X دالة منفردة ، وانها مستمرة ولها مشتقات ، وانها محـــددة فقط عند القيم غير السالبة لكل من الانتاج ومستلزماته.

وتختلف دالة الإنتاج في الآجل القصير عن دالة الإنتاج في الآجل الطويل، إلا أن الاختلاف لا يتعدى مستلزمات الإنتاج المتغيرة ويمكن تطبيق جميع النتـــائج الخاصة بالآجل القصير على الآجل الطويل.

والشكل التالي يوضح مدى أوجه الاختلاف بين دالة الإنتاج في الآجل القصير عن دالة الإنتاج في الآجل الطويل وذلك كما يلي :

دالة الانتاج في الاجل القصير	دالة الانتاج في الاجل الطويل
• $X = f(q_L, q_K)$ عنصر متغير ↓ (q_L) ، عنصر ثابت ↓ (q_K) • هناك عناصر انتاج متغيرة وثابتة. • لا يستطيع المنظم تغيير مستوى مستلزمات الانتاج الثابتة. • لا يتغير شكل دالة الانتاج بسبب التقدم التكنولوجي . • تتم العمليات الانتاجية باستخدام الطاقة الانتاجية القائمة. • يحكم العلاقة بين حجم الناتج الكلي وعناصر الانتاج " قانون تناقص الغلة"	• $X = f(q_L, q_K)$ عنصر متغير ↓ (q_L) ، عنصر متغير ↓ (q_K) • كل عناصر الانتاج متغيرة. • يستطيع المنظم تغيير مستوى مستلزمات الانتاج الثابتة. • يتغير شكل دالة الانتاج بسبب التقدم التكنولوجي . • تتم العمليات الانتاجية باستخدام الطاقة الانتاجية القائمة ويمكن زيادتها . • يحكم العلاقة بين حجم الناتج الكلي وعناصر الانتاج " قانون غلة الحجم"

-2-

منحنيات الانتاج

قبل أن نتحدث عن منحنيات الإنتاج لابد لنا أن نوضح مجموعة من المفاهيم الأساسية المرتبطة بمنحنيات الإنتاج

أولاً: الناتج الكلي Total Product : هو عدد الوحدات المنتجة من سلعة X الناتجة عن استخدام كميات مختلفة من العنصر L (العمل) مع ثبات العنصر K (رأس المال) عند مستوى معين ولكن qk أي أن دالة الإنتاج للعمل.

$$X = f(q_L, q_K)$$

-وبالتالي يصبح X دالة في qL فقط ولابد لنا أن نوضح أن أي زيادة في رأس المال المستخدم qk يؤدي عادة إلى نقص الكمية من العمل اللازمة مستوى معين من X.

ثانياً: الناتج المتوسط Average Product : هو انتاجية الوحدة الواحدة من العمل اي من العنصر المتغير.

الناتج المتوسط للعامل = الناتج الكلي / عدد العمال

$$AP_L = \frac{T\,P}{L}$$

أي أن إنتاجية المتوسطة للعمل هي الإنتاجية الكلية من العنصر للعنصر مقسومة على الكمية المستخدمة.

ثالثاً: الناتج الحدي Marginal Product : معدل التغير في الانتاجية الكلية للعنصر المتغير بالنسبة لتغيرات كمية العنصر المتغير.

الناتج الحدي = التغير في الناتج الكلي / التغير في وحدات عنصر الإنتاج

$$MP_L = \frac{d\,X}{d\,q_L} = \frac{X_2 - X_1}{q_{L2} - q_{L1}}$$

ولابد لنا أن نوضح أن الناتج الحدي MP_L، الناتج المتوسط AP_L يتزايدان في بداية النشاط الإنتاجي ثم يأخذان في التناقص مع زيادة عنصر العمل qL، ويبلغ الناتج المتوسط AP_L قيمة عظمى عند مستوى العمل qL أقل من المستوى الذي يصل عنده الناتج الحدي MP_L.

والناتج المتوسط، والناتج الحدي يتقاطعان عندما يصل الناتج الحدي أقصى قيمة

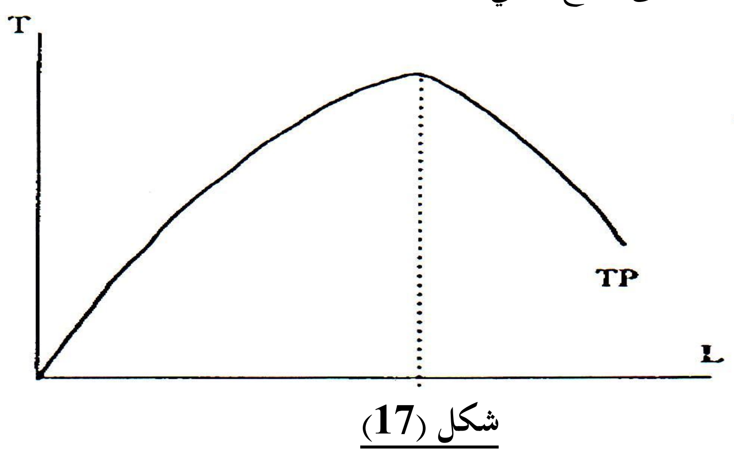
في هذه الحالة نجد أن الناتج الحدي يساوي النـــاتج المتوســـط AP_L
$MP_L =$

وفيما يلي نوضح بالأشكال البيانية كل من:

الناتج الكلي TP ، الناتج الحدي MP ، الناتج المتوسط AP

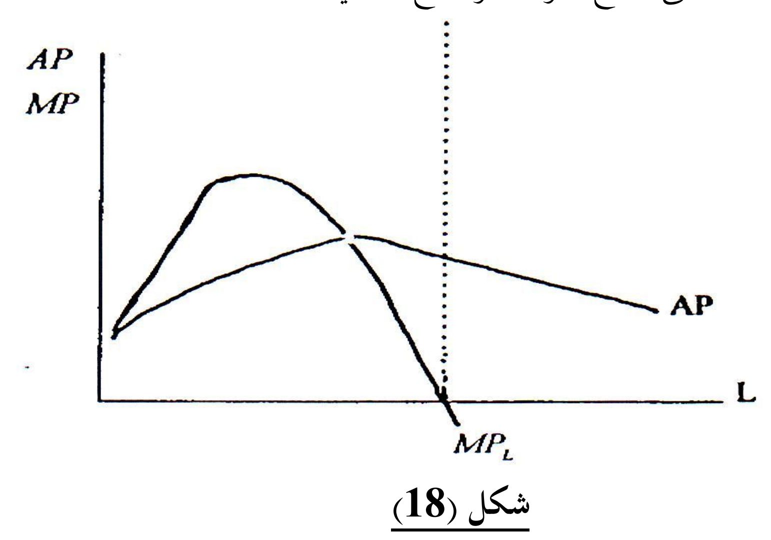
حيث يقدر كل منحنى من هذه المنحنيات بمستوى معين من 9K

1-منحنى الناتج الكلي



شكل (17)

2-منحنى الناتج المتوسط والناتج الحدي



شكل (18)

يلاحظ من الرسم ان الانتاج يمر بثلاث مراحل :

المرحلة الاولي : كلما زادت وحدات من عنصر العمل مع ثبـــات رأس المال يتزايد كل من الناتج الكلي والمتوسط والحدي ايضاً ولكن يتزايد الناتج الحدي MP_L بدرجة أكبر من زيادة الناتج المتوسط AP_L و لذلك فتسمي تلك المرحلة بمرحلة الغلة المتزايدة .

المرحلة الثانية: كلما زادت وحدات من العمل مع ثبات رأس المال يزيد الناتج الكلي بشكل متناقص ثم يصل الي الثبات عند مستوي معين ويقـــل النـــاتج المتوسط كما يقل الناتج الحدي ولكن بشكل اكبر من الناتج المتوســـط ولـــذلك تسمي بمرحلة تناقص الغلة.

عندما يصل الناتج الكلي الي اقصي مستوى له يكون الناتج الحدي قـــد وصل الي الصفر و هنا يجب ان يتوقف المنتج عن اضافة وحـــدات جديـــدة مـــن وحدات عنصر العمل. وإلا سوف يحقق خسارة.

المرحلة الثالثة: كلما زادت وحدات من العمل مع ثبات رأس المال يؤدي الي تناقص الناتج الكلي كما يقل الناتج المتوسط ايضاً و ينخفض النـــاتج الحـــدي بشكل اكبر ويكون سالباً و لا يجب الدخول الي تلك المرحلة ويجب ان يتوقـــف المنتج عن اضافة وحدات جديدة من العنصر المتغير .

من الواضح ان MP_L, AP_L تتزايدان ثم تأخذان في التناقص بزيادة q_L وتبلغ MP_L قيمة عظمى عند مستوى من العمل q_L اقل من المستوى الذي تصل عنده AP_L الى نهايتها العظمي والملاحظ ان AP_L و MP_L تتقاطعان عنـــد بلوغ AP_L قيمتها العظمى .

ومن المنحنيات السابقة نستخلص قانون الإنتاجية المتناقصة.

-3-

قانون الانتاجية المتناقصة (قانون تناقص الغلة):

إن كل من منحنيات الناتج الكلي والحدي والمتوسط تتزايد في البداية مع زيادة عنصر العمل المتغير حتى تصل كل منهما لاقصاها ثم يبدأ كـــل منــــهما في التناقص بعد ذلك.

اي تتناقص MP_L بعد فترة تزايد وذلك بزيادة q_L مع ثبات q_K لاحظ ان هذه العلاقات تفترض:

1. ان هناك عنصر ثابت من عناصر الانتاج q_k
2. ان هناك عنصر متغير من عناصر الانتاج q_L
3. ثبات المستوى التكنولوجي.

-4-

دالة إنتاج كوب دوجلاس

وهي دالة انتاج توضح شكل الانتاج في الاجل الطويل

$$X = A\, q_L^{a}\, .q_K^{B}$$

حيث ان X حجم الانتاج الكلي . q_L عنصر العمل .

q_k عنصر رأس المال. A ثابت . a,B ثوابت.

عندما $a+B = 1$ تكون مرحلة ثبات غلة الحجم .

عندما $a+B > 1$ تكون مرحلة تزايد غلة الحجم.

عندما $a+B < 1$ تكون مرحلة تناقص غلة الحجم.

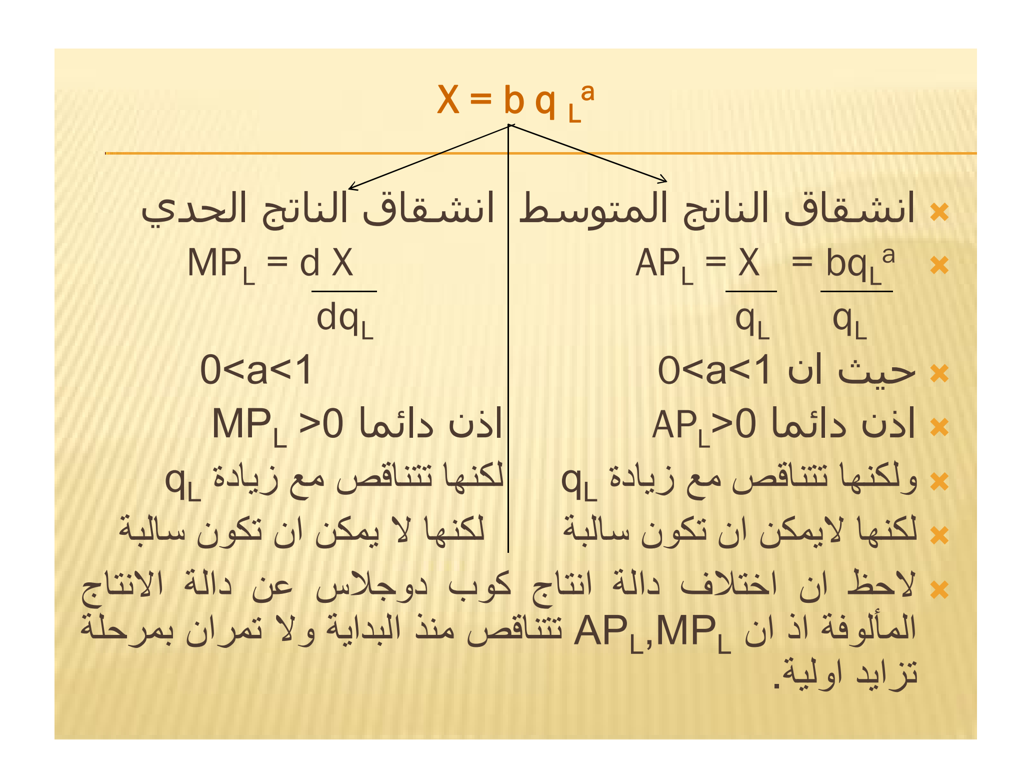
يتم افتراض ان رأس المال ثابت عند المستوى q_k

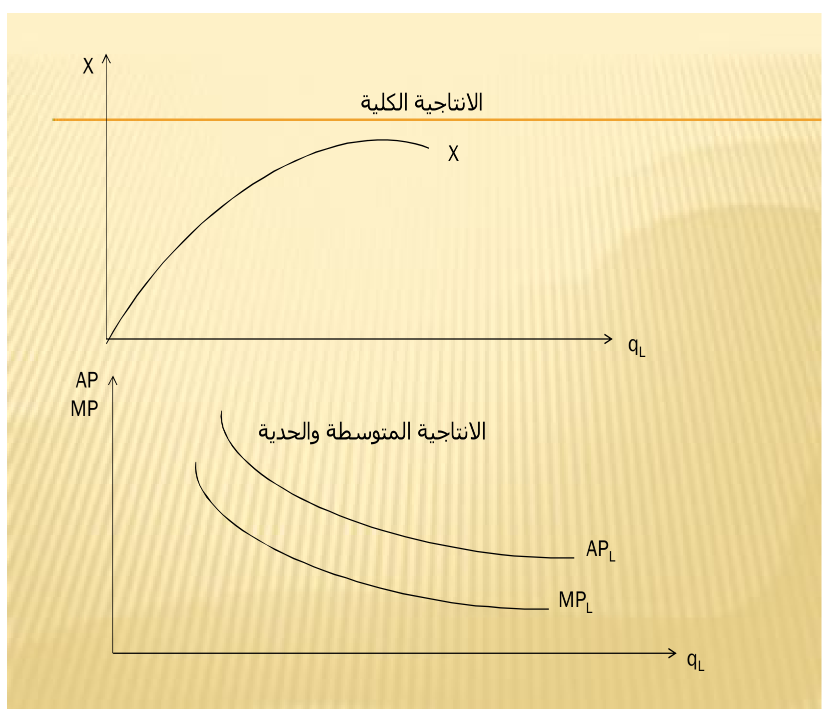
بالتالي فيمكن تعريف ثابت جديد $b = A\, q_k^{B}$

-5-

كيفية اشتقاق منحنيات الناتج المتوسط

والناتج الحدي من دالة انتاج كوب دوجلاس



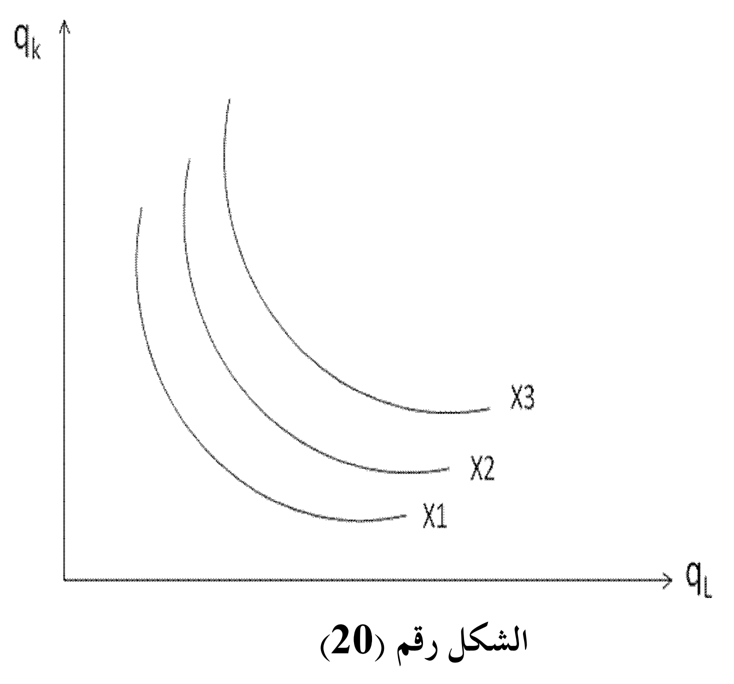


الشكل رقم (19)

-6-

منحنيات الناتج المتساوي

يبين منحى الناتج المتساوي التوليفات المختلفة من q_L, q_k والتي تنتج نفس القدر من الانتاج $\overline{X}$. فإذا كان مستوى الإنتاج X مـــنحنى أن العلاقـــة $\overline{X} = F(q_l, q_K)$ حيث X (ويمثل) أي منحنى من منحنيات الـــسواء في للكـــل الآتي الكميات المختلفة من qL, qK وأن أي زيادة من qL, qK تؤدي إلى زيـــادة الإنتاج X وبالتالي كلما ابتعد منحنى السواء عن نقطة الأصل فإن ذلك معناه زيادة الإنتاج أي أن X3, X2, X1.



الشكل رقم (20)

يعبر ميل المماس لمنحى الناتج المتساوى عند أية نقطة على معدل احــلال العمل برأس المال (أو رأس المال بالعمل) وذلك للاحتفاظ بالانتاج عند مـــستوى ثابت .

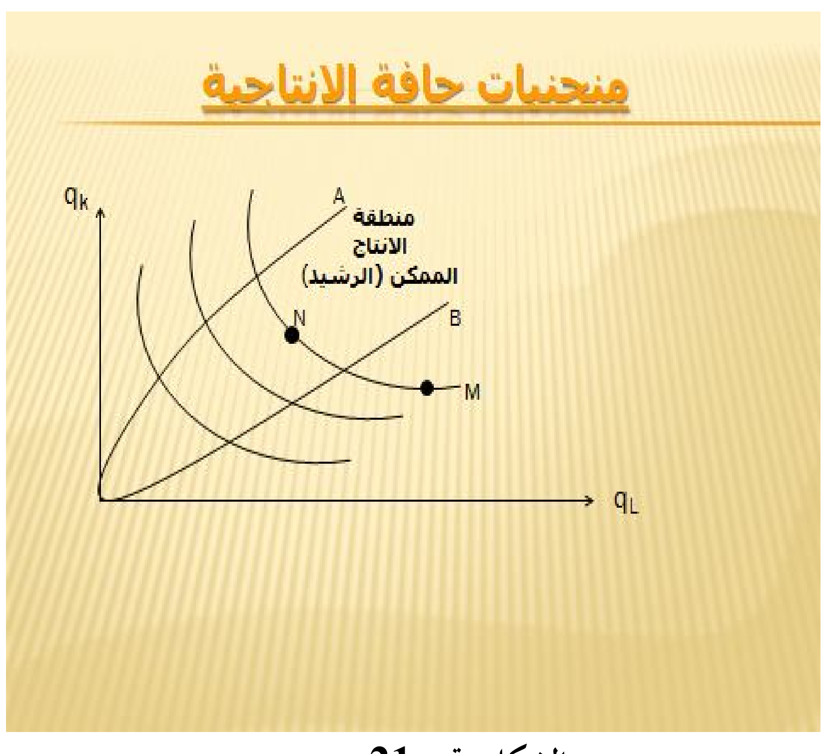
-7-

معدل الاحلال الفني : RTS

$$RTS = \frac{d\,q_K}{d\,q_L} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

فالملاحظ أن التحرك على نفس منحى الناتج المتساوى يعني إحلال عنصر إنتاج محل عنصر إنتاج اخر.

وبالتالي فان معدل الاحلال الفني عند ايه نقطة على أحد منحنيات الناتج المتساوى يساوى النسبة بين الانتاجية الحدية للعمل الى الانتاجية الحدية لرأس المال.



الشكل رقم (21)

وتصبح الانتاجية الحدية لاحد عناصر الانتاج سالباً اذا زاد استخدام هــذا العنصر عن حد معين ففي النقطة M تكــون MP_L ســالبة و MP_K موجبــة وبالتالي يكون RTS سالباً وبالتالي ان النقطة N افضل مــن النقطــة M اذ ان الكميات كل من العمل ورأس المال المستخدمة في N اقل من الكميات المستخدمة في M وذلك لانتاج نفس القدر من السلعة وبالتالي فطالما ان المنتج يدفع ثمناً موجباً للحصول على اى عنصر من عناصر الانتاج و اننا نفترض انه يسلك سلوكا رشيداً فانه لن ينتج على الجزء من منحنى الناتج المتساوى ذى الميل الموجب ويحدد الخطان A,B ويطلق عليه منحنى حافة الانتاجية المنطقة التي لايخرج عنها المنتج الرشــيد حيث يكون RTS موجباً.

ملحوظة: يجب ملاحظة أنه في حال دالة الإنتاج كوب دوجلاس لا يمكن أن تصبح الإنتاجية الحدية لأي عنصر من العنصرين من العمل ورأس المال سالبة وبالتالي لا يحدث أن يكون ميل منحنى الناتج المتساوي موجب.

-8-

السلوك الامثل للانتاج

أولاً: كيف يتحدد الحجم الامثل للانتاج

- سوف تقتصر الدراسة على حالة المنتج الذي يشتري عنصرين من عناصر الانتاج (العمل ، رأس المال) بأسعار ثابتة من سوق تسودها المنافسة الكاملة.

- **تكون التكاليف الكلية** $\mathbf{C = P_L\, q_L + P_K\, q_k + F}$
- C: التكاليف الكلية .
- P_L: سعر عنصر العمل (الاجر).
- P_K: سعر عنصر رأس المال (الفائدة).
- q_L: كمية العمل.
- q_K: كمية رأس المال.
- F: التكاليف الثابتة.

ثانياً: خط التكاليف المتساوية : يمثل المجموعات المختلفة من عناصر الانتاج التي يمكن شراؤها بذات التكاليف الكلية .

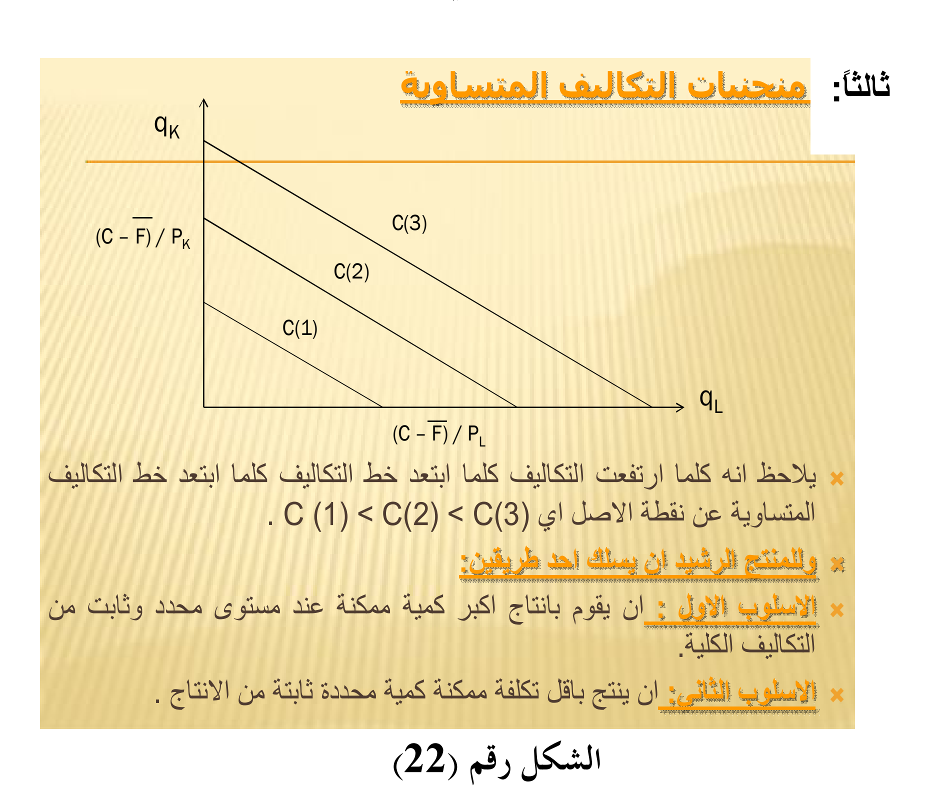
ويمكن كتابة المعادلة في الصورة الآتية:

$$C = P_L\, q_L + P_K\, q_K + F$$

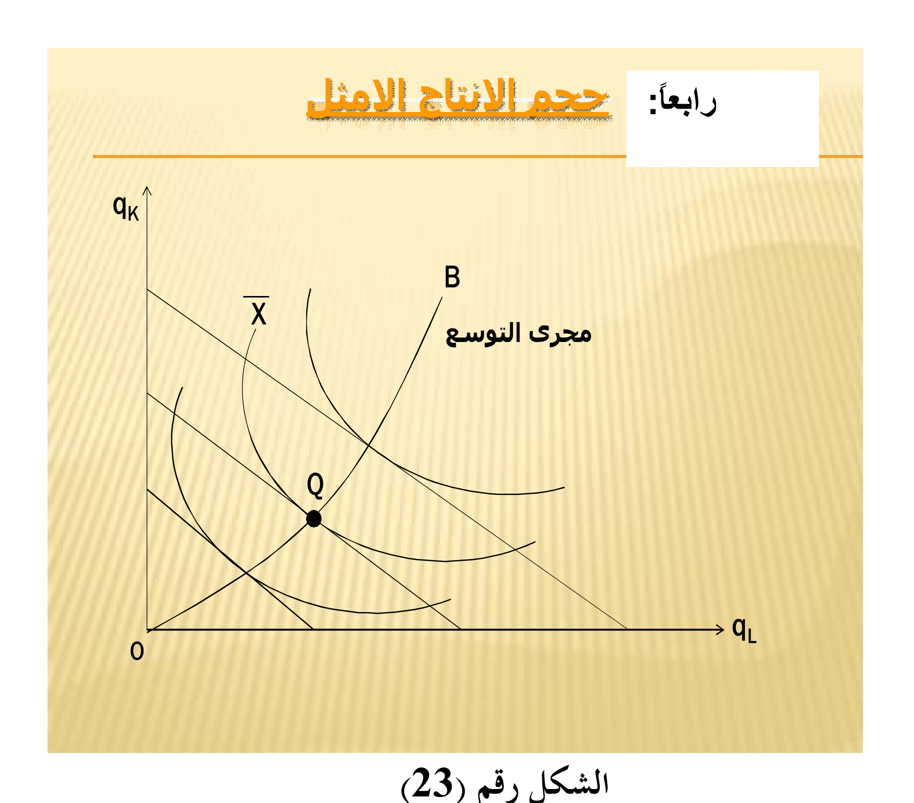
$$q_K = \frac{C - F}{P_K} - \frac{P_L\, qL}{P_K}$$

ويتضح من هذه الصيغة ان ميل خط التكاليف المتساوية يساوي سـالب نسبة اسعار عناصر الانتاج و ان تقاطع الخط مع محور كميات عنصر رأس المال هو $(C - F) / PK$وهو يمثل كمية رأس المال المشتراه اذا انفقت كل التكـاليف على شراء رأس المال كما ان تقاطع خط الناتج المتاوى مع محور العمل $(C - F)$ $/PL$ يمثل الكمية المشتراه من العمل عند انفاق كل التكاليف على هذا العنصر

ونلاحظ في الشكل التالي أنه كلما ارتفعت التكاليف كلما ابتعـد خـط التكاليف المتساوية عن نقطة الأصل وهذا يعني $C_1 < C_2 < C_3$



الشكل رقم (22)



الشكل رقم (23)

مجرى التوسع B : يسمى المحل الهندسي الواصل بين نقاط الانتاج المثلى يجري التوسع للمنشأة وهو يحدد عناصر الانتاج المثلى التي تحقق اكبر انتاج عند تكلفة ثابتة او اقل تكلفة للحصول على كمية معينة من الانتاج. $O = g\,(q_L\ ,\ q_K)$

يمثل **الاسلوب الاول** في تحديد خط معين للتكاليف الثابتة C و البحث عن اعلى مستوى للانتاج يمكن تحقيقه بهذه التكلفة اما **الاسلوب الثاني** يتلخص في تحديد خط الناتج المتساوي X والبحث عن اقل تكلفة يمكن تحملها في سبيل تحقيق هذا المستوى من الانتاج X ويبين الشكل ان الاسلوبين يؤديان الى نتيجة واحدة وهى ان حجم الانتاج الامثل او مستوى التكاليف الامثل يتحقق عند النقطة **Q**. التي تمثل اكبر انتاج يمكن تحقيقه بالتكلفة C ويمثل ايضا اقل تكلفة يمكن تحملها في

سبيل انتاج X اي التوليفة والمزج المثلى لعناصر الانتاج التي يحقق حجم الانتـــاج الامثل باقل تكاليف ممكنة.

عند النقطة Q:

ميل منحنى الناتج المتساوى = ميل خط التكلفة المتساوى

$$RTS \quad \frac{P_L}{P_k} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

وبالتالي يتحقق الشرط اللازم للتوازي هو أن تكون النسبة بين الإنتاجيات الحدية لعنصر العمل، الإنتاجية الحدية لعنصر رأس المال مساوية لأسعارهم، وبتحقق الشرط اللازم للتوازن أيضاً عندما يتساوى معدل الإحلال الفني مع النـــسبة بـــين أسعار عناصر الإنتاج

$$RTS = \frac{P_L}{P_K}$$

∴ المنتج الرشيد يسلك أحد طريق:

1-**الأسلوب الأول**: أن يقوم بإنتاج أكبر كمية معينة عند مستوى محدد وثابت من التكاليف (القليلة).

2-**الأسلوب الثاني**: أن ينتج بأقل نفقة ممكنة كمية محددة وثابتـــة مـــن الإنتاج.

3-**الأسلوب الثالث**: تحقيق أقصى ربح.

يعرف الربح على أنه الفرق بين الإيراد والنفقة حيث أن الإيراد هو حاصل ضرب الوحدات المباعة في سعر الوحدة منها أي أن $R = P_X$

حيث أن R هي الإيراد الكلي

P هي سعر الجودة

X الكمية المنتجة

H ربح المنتج

إذ أن التكاليف C هي مجموع ما يتحمله المنتج في سبيل إنتاج X.

$$R = R - C$$

$$R = P_L (q_L q_K) - P_L q_L - P_K q_K$$

من هذه المعادلة يتضح أن الربح دالة في q_L q_K ويمكن تحديـــد نهايتـــها العظمى لدالة من الدرجة الأولى كما يلي:

$$\frac{\partial R}{\partial 9_L} = F_L P - P_L = o$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_K} = F_K P - P_K = o$$

أو

$$PF_L = P_L \quad PF_K = P_K$$

ومعنى ذلك أن الشرط اللازم للنهاية العظمى للربح هو أن يستخدم كـــل عنصر من عناصر الإنتاج عند المستوى الذي تتساوى عنده قيمة الإنتاجية الحديـــة للعنصر مع سعر خدمة هذا العنصر فيمكن للمنتج زيادة ربحه طالما أن اســـتخدام وحدة إضافية من العنصر تضيف إلى إيراده مقدار أكبر من المقدار المضاف إليه إلى النقطة.

اشتقاق منحنى العرض

أولاً: الفترة القصيرة جداً: لا يستطيع المنتج خلال هذه الفترة تغير حجـــم إنتاجه وبالتالي يأخذ منحنى العرض شكل خط مستقيم عمـــودي علـــى محـــور الكميات ونقطة تقاطعه مع المحور بين حجم الإنتاج الثابت وذلك مع افتراض عدم قابلية السلعة المنتجة للتخزين

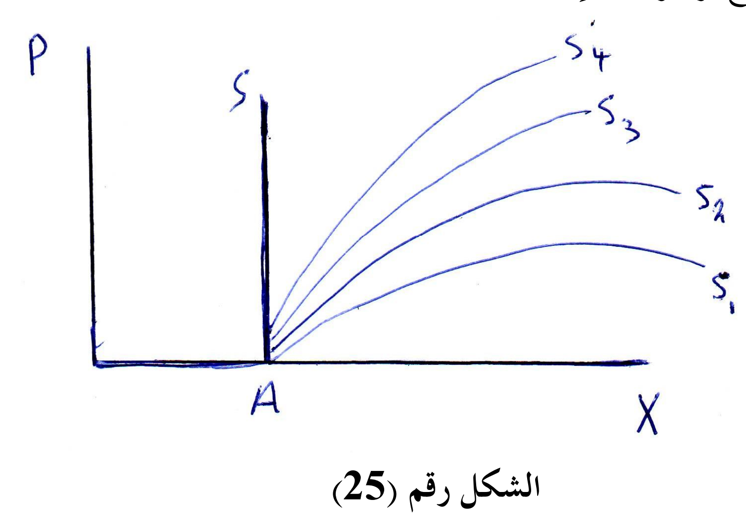


الشكل رقم (24)

ويشتق منحنى عرض السوق من منحنيات العرض الفردية وتجمـــع هـــذه المنحنيات أفقياً.

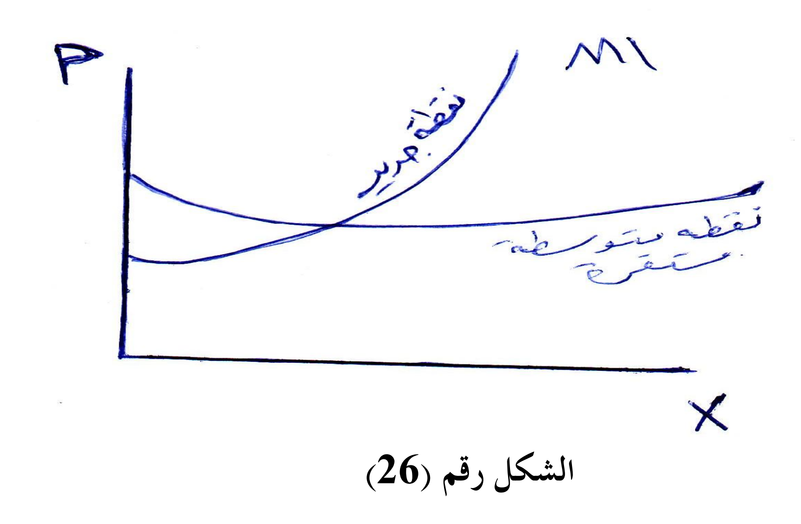
ثانياً: اشتقاق منحنى العرض في الفترة القصيرة:

يستطيع المنتج في هذه الفترة تغير حجم إنتاجه بتغير مستوى استخدام إلى عناصر الإنتاج المتغيرة، مع بقاء عناصر الإنتاج الثابتة وبالتالي لا يستطيع تعـــديل حجم المشروع أو الوحدة الإنتاجية.



الشكل رقم (25)

ولابد لنا أن نوضح أن المنتج يستطيع أن يستمر في العملية الإنتاجية خلال الفترة القصيرة إذا كان يستطيع أن يقوم بتغطية التكلفة المتغيرة للمشروع بجانب تغطية التكاليف الثابتة، إن المنتج كما أوضحنا من قبل يستطيع تحقيق أقصى ربح في المدى القصير في ظل المنافسة الكاملة إذا تساوى الإيراد الحدي مع النفقة الحدية وأن يتساوى السعر مع النفقة الحدية وينطبق منحنى العرض في الفترة القصيرة في الجزء الذي يكون منه ميل منحنى النفقة الحدية موجب والذي يقع فوق منحنى النقطة المتوسطة المتغيرة ويساوي الإنتاج الصفر عن الأسعار التي تقل عن السعر P_0 أي أن عندما $X = 0$ $P < P_0$



الشكل رقم (26)

الفصل الرابع

دوال التكاليف

تتمثل مشكلة المنتج في تحديد مستوى إنتاج يحقق له أقصى ربـــح بأقـــل تكاليف ممكنة وبالتالي نجد أن هناك مشكلة لتحديد النسب المثلى لعناصر الإنتـــاج التي تقوم بإنتاج مستوى معين من الناتج وتحقق له أقصى ربـــح ومـــن ثم يقـــوم الاقتصادين بتحليل سلوك المنتج بدلالة إيراداته ونفقاته معبراً عنها كدوال في كمية الإنتاج.

-1-

دوال التكلفة في الاجل القصير

يمكن استنتاج دوال التكلفة من دالة الانتاج ومعادلة التكلفة ودالة مجرى التوسع :

من المعادلات التالية:

$$X = f(q_L, q_K)$$
$$C = P_L q_L + P_K q_K + F$$
$$O = g(q_L, q_K)$$

بالتالي يكون ثلاث معادلات لتحديد أربع متغيرات C, X, q_K, q_L

ويمكن لنا حل هذه المعادلات لتحديد أربع متغيرات والحصول على النفقة C كدالة في مستوى الإنتاج مضافاً إليها النفقة الثابتة.

التكاليف الكلية : $TC = VC + F$ او $TC = h(X) + F$

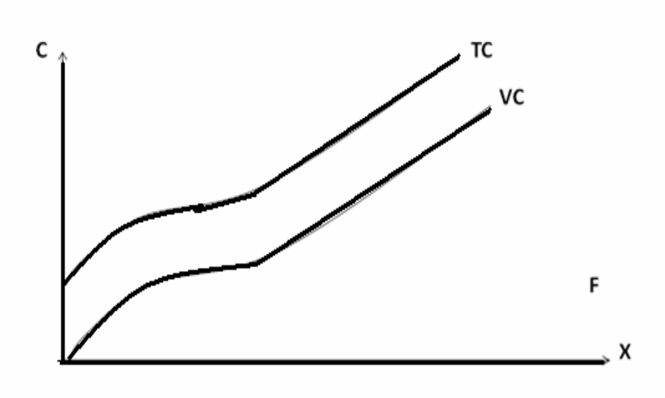
حيث (TC) Total Cost: تمثل التكاليف الكلية.

$h(X)$ تمثل عناصر الانتاج: $(q_L.P_L + q_K.P_K)$

$V(C)$ (Variable Cost): التكاليف المتغيرة.

F (Fixed Cost): التكاليف الثابتة .

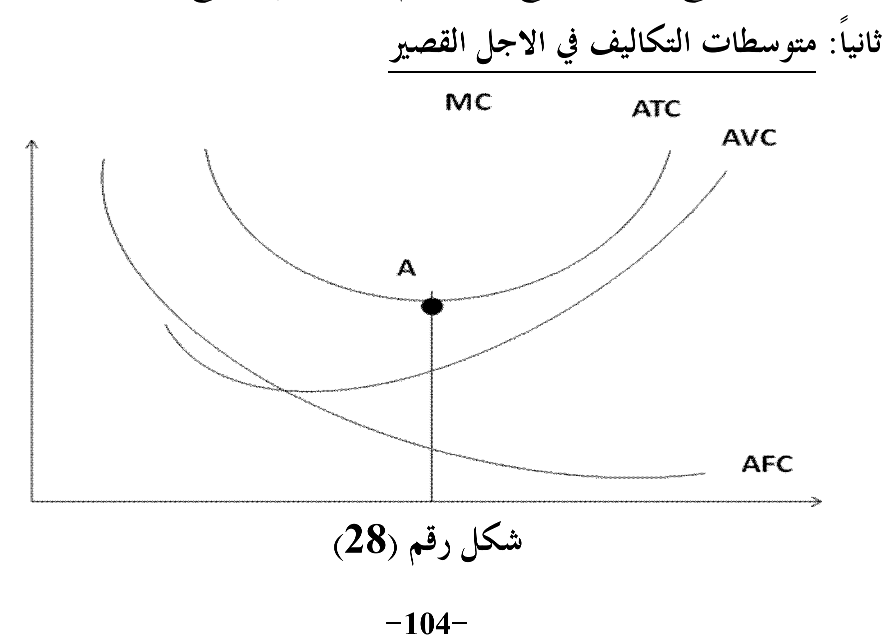
أولاً: التكاليف الكلية في الاجل القصير



شكل رقم (27)

من الملاحظ ان التكاليف الثابتة لا تتأثر بعدد الوحدات المنتجة وتتحملها المنشأة سواء انتجت او لم تنتج وتوضح دالة التكاليف اقل تكلفة يمكن ان يتحملها المنتج في سبيل انتاج كل حجم من احجام الانتاج.

ثانياً: متوسطات التكاليف في الاجل القصير



شكل رقم (28)

حجم الانتاج الامثل عند اقل تكلفة ممكنة

$MC = ATC$

يلاحظ من الشكل:

1. تبلغ التكلفة الحدية نهايتها الصغرى عند مستوى للانتاج اقل من المستوى الذي تبلغ كل من ATC,AVC نهايتهما الصغرى كما ان AVC تبلغ قيمتها الصغرى قبل ATC.
2. تتخذ AFC شكل قطع زائد اذ ان التكلفة الكلية الثابتة توزع على عدد اكبر من وحدات الانتاج كلما زاد حجم الانتاج وبالتالي تتناقص AFC بزيادة الانتاج.
3. تساوي المسافة الرأسية بين منحنى ATC ومنحنى AVC التكلفة الثابتة المتوسطة AFC وبالتالي تتناقص هذه المسافة بزيادة الانتاج. $ATC = AVC + AFC$
4. يقطع منحنى التكلفة الحدية منحنى التكلفة الكلية المتوسطة أو التكلفة المتغيرة المتوسطة عند قيمتها الصغرى اي $MC=ATC$ / $MC = AVC$.
5. اذا كان منحنى التكلفة المتوسطة متناقصاً بالنسبة للكميات فان $MC<AC$ واذا كان متزايدا فان $MC>AC$ (حيث تشير AC الي التكلفة المتوسطة الكلية او المتغيرة).

يمكن استنتاج علاقات التكلفة للوحدة

أولاً: التكلفة الكلية المتوسطة (Average Total Cost ATC)

$$ATC = \{ h(X) + F\} / X$$

$$ATC = AVC + AFC$$

ثانياً: التكلفة المتغيرة المتوسطة للوحدة AVC (Variable Average Cost)

$$AVC = h(X) / X$$

ثالثاً: التكلفة الثابتة المتوسطة للوحدة(Average Fixed AFC (Cost

$$AFC = FC / X$$

4. التكلفة الحدية MC (Marginal Cost)

$$MC = \Delta TC / \Delta X \quad \text{أو} \quad MC = \Delta VC / \Delta X$$

تحديد أقصى ربح

يمكن التعبير عن الربح كدالة في كميات عناصر الإنتاج المستخدمة qK qL ويمكن لنا أن نحدد القيمة العظمى للربح بدلالة qK , qL

ويمكن التعبير عن الربح كدالة في حجم الإنتاج فيتم تعريفه على أنه:

$$\mathbf{r = R - C}$$

حيث تمثل r: الربح .

أولاً: الايراد الكلي:

C: (Cost): التكلفة الكلية $C = P_L\, q_L + P_K\, q_K + F$

الايراد الكلي = السعر × الكمية $\mathbf{R = P.\, X}$

ثانياً: الايراد المتوسط:

$$AR = R / X = P.X / X = X$$

بالتالي فالايراد المتوسط يساوي السعر دائماً وذلك في سوق المنافسة الكاملة .

ثالثاً: الايراد الحدي:

$$MR = \Delta R / \Delta X$$

بالتالي فالايراد الحدي يساوي الايراد المتوسط يساوي السعر دائماً وذلك في سوق المنافسة الكاملة. $MR = AR = P$

اي ان الربح دالة في متغير واحد وهو حجم الانتاج X **فالشرط اللازم** للحصول على اقصى ربح هو :

التكلفة الحدية = الايراد الحدي

$$MC = MR$$

معنى ذلك أن النفقة الحدية تساوي الإيراد الحدي

اما **الشرط الكافي** ان تكون التكاليف الحدية متزايدة اي ان يكون ميل منحنى التكلفة الحدية اكبر من ميل منحى الايراد الحدي مما يشير الى ان زيادة الحجم الانتاج عن المستوى الذي تحدده يؤدي الى نقص الربح .

ومعنى ذلك أن معدل تغير النفقة الحدية بالنسبة لحجم الإنتاج أكبر من معدل تغير الإيراد الحدي.

من ذلك نلاحظ:

1-أن مستوى النفقة الثابتة لا يؤثر على سلوك المنتج في الآجل القصير تفسير ذلك من الناحية الاقتصادية هو أن المنتج يتحمل هذه النفقة سواء أنتج أم لم ينتج، ويمكنه التوقف عن الإنتاج طالما أن نفقة إنتاجية المتغيرة المتوسطة أقل من الإيراد والمتوسط وبالتالي فإن شروط تحقيق أقصى ربح لا تأخذ هذه الحالة في الحسبان.

2-في حالة فرض ضريبة: أن فرض ضريبة اجمالية على الانتاج لا تؤثر على حجمه الامثل اذ انها تعتبر بمثابة تكلفة ثابتة يتحملها المنتج فاذا فرضت ضريبة اجمالية على الانتاج قدرها T تصبح دالة التكاليف:

$$C = h(X) + F + T$$

حيث T مقدار ثابت وبالتالي لا يتأثر الانتاج الامثل بالضريبة الاجمالية .

على العكس بالنسبة للضريبة الاجمالية تؤثر الضريبة النوعية على الحجم الامثل للانتاج فهي تفرض بمعدل ثابت على كل وحدة منتجة وبالتالي تصبح دالة التكاليف بعد فرض ضريبة نوعية بمعدل t.

$$C = h(X) + F + tX$$

مثال (1)

- اذا كانت دالة التكاليف لمنتج ما كما يلي :
- $C = 100 + 5X + 3X^2$
- وكانت دالة الطلب على السلعة التي ينتجها :
- $P = 145 - 4X$
- **المطلوب :**

1. ايجاد التكلفة الحدية.
2. ايجاد التكلفة الكلية المتوسطة.
3. ايجاد الايراد الحدي و الايراد المتوسط.
4. ايجاد حجم الانتاج الذي يحقق اقصى ربح للمنتج.
5. ايجاد ربح المنتج عند حجم الانتاج الذي يحقق اقصى ربح للمنتج.

الحل

1. $MC = dC / dX = 5 + 6X$
2. $ATC = TC / X = 100/X + 5X / X + 3X^2 / X$
   - $= 100/X + 5 + 3X$
   - $AVC = VC / X = 5X / X + 3X^2 / X$
   - $= 5 + 3X$
3. $R = P . X$
   - $R = (145 - 4X) . X$
   - $R = 145X - 4X^2$
   - $MR = dR / dX$
   - $MR = 145 - 8X$
   - $AR = R / X$
   - $AR = 145X / X - 4X^2 / X$
   - $AR = 145 - 4X$

4. حجم الانتاج الذي يحقق اقصى ربح للمنتج

- $MR = MC$
- $145 - 8X = 5 + 6X$
- $145 - 5 = 6X + 8X$
- $140 = 14X$
- $X = 140/14 = 10$

5. $r = R - C$

- $P.X - 100 + 5X + 3X^2$
- $(145 - 4X) . X - 100 + 5X + 3X^2$
- $(145 - 40)\ 10 - 100 + 50 + 3\ (10)^2$
- $(1450 - 400) - 100 + 50 + 300$
- $1050 - 450$
- $r = 600$ اقصى ربح للمنتج

مثال (2)

- اذا كانت دالة التكاليف لاحد المنتجين كما يلي :
- $C = 100 + 4X^2$
- وكانت دالة الطلب على سلعته :
- $P = 100 - 2X$
- **المطلوب :**

1. ايجاد التكلفة الحدية.
2. ايجاد الايراد الحدي و الايراد المتوسط.
3. ايجاد حجم الانتاج الذي يحقق اقصى ربح.
4. ايجاد ربح المنتج عند حجم الانتاج الذي يحقق اقصى ربح .

4. $r = R - C$

- $r = P . X - \{100 + 4X^2\}$
- $r = (100 - 2X) . X - \{100 + 4X^2\}$
- $r = 100X - 2X^2 - \{100 + 4X^2\}$
- $r = \{100 \times 8.3 - 2(8.3)^2\} - \{100 + 4(8.3)^2\}$
- $r = \{830 - 137.78\} - \{100 + 275.56\}$
- $r = 692.22 - 375.56$
- $r = 316.66$

الحل

1. $MC = dC / dX = 8X$
2. $R = P . X$

- $R = (100 - 2X) . X$
- $R = 100X - 2X^2$
- $MR = dR / dX = 100 - 4X$
- $AR = R / X = 100X / X - 2X^2 / X$

3. حجم الانتاج الذي يحقق اقصى ربح للمنتج

- $MR = MC$
- $100 - 4X = 8X$
- $100 = 12X$
- $X = 100/12$
- $X = 8.3$

الفصل الخامس

تحليل جانب الطلب

نظرية سلوك المستهلك

نبدأ هذا الفصل بتوضيح بعض التعريفات الأساسية اللازمة لتحليل نظرية سلوك المستهلك ونتبعها بمناقشة طبيعة دالة منفعة المستهلك ثم نتناول بعد ذلك بإيجاز شديد شروط توازن المستهلك بفرض أنه يسلك سلوكاً رشيدا ومن ذلك نستنتج دوال الطلب.

تعاريف أساسية:

-1-

طبيعة دالة المنفعة: Utility Function

يتم الافتراض ان المستهلك رشيد في تصرفاته بمعنى انه اذا خير بين عدة مجموعات من السلع اختار المجموعة التي تحقق له اكبر اشباع ممكن.

ويتطلب مبدأ السلوك الرشيد ان يستطيع المستهلك ترتيب السلع المختلفة بحسب درجة تفضيله لها .اي يكفي ان يكون مقاسه للمنفعة ترتيبياً Ordinal اي لا يحتاج المستهلك الى تحديد قياس عددي لهذا التفضيل أو لدرجة او كمية الاشباع التي يحصل عليها من السلع المختلفة.

ويقتضي افتراض هذا السلوك الرشيد لمستهلك ما يلي:

1-أن يعرف المستهلك بالنسبة لأي مجموعين (X_1) , (X_2) أو يفصل (X_2) على (X_1) أو أنه يستوى عنده الحصول على أيهما.

2-أن تكون إحدى الإمكانيات الثلاثة السابقة دون غيرها صحيحة فمثلا إذا كان المستهلك يفضل (X_1) على (X_2) فلا يمكن أن يفضل أيضا X_2 على X_1 وأن يستوى الحصول على أيهما.

3-إذا كان المستهلك يفضل x1 على x2 x2 على x3 فإنه لابد أن يفضل المستهلك x1 على x3 ونلخص من ذلك بأن المستهلك لابد أن يسلك سلوكا منسقاً. ويتطلب ذلك من المستهلك أو السلوك الرشيد له أن يقوم بترتيب السلع على حسب درجة تفضيله لها، بمعنى آخر أن لا يحتاج المستهلك إلى تحديد قيمة عددية لدرجة اشباعه أو كميه الاشباع التي نحصل كلها ويغير عن ذلك الترتيب بدالة المنفعة الترتيبية.

-2-

دالة المنفعة الترتيبية

انها الاداة التي تبين بطريقة ترتيبية مدى الاشباع الذي يحصل عليه المستهلك من استهلاكه لكميات السلع المختلفة في حدود دخله فاذا افتراضنا ان المستهلك يشتري سلعتين فقط 2,1 تكون دالة منفعته الترتيبية :

$$\mathbf{U = f\,(X_1 - X_2)}$$

حيث X1 , X2 الكميات المستهلكة من السلعتين 2,1 على التوالي .

<u>خصائص دالة المنفعة:</u>

1-ان الدالة f مستمرة .

وأن مشتقاها الجزئية الأولى، والثانية مستمرة أيضاً

2-ان منفعة المستهلك تزداد كلما زادت الكمية التي يحصل عليها من احدى السلعتين مع ثبات كمية السلعة الاخرى وبالتالي فان U متزايدة باستمرار في كل من X_1, X_2

3- نفترض أن تناقص المنفعة الحدية أي أن دالة المنفعة تزيد بمعدل متناقص لتناقص المنفعة الحدية.

4-تناقص معدل الاحلال الحدي: وباختصار نوضح أن دالة مستمرة ويمكن مفاضلتها وهي متزايدة باستمرار بالنسبة للسلعة ولكنها متزايدة بمعدل متناقص بالإضافة إلى ذلك فإنها مقعرة إلى أعلى

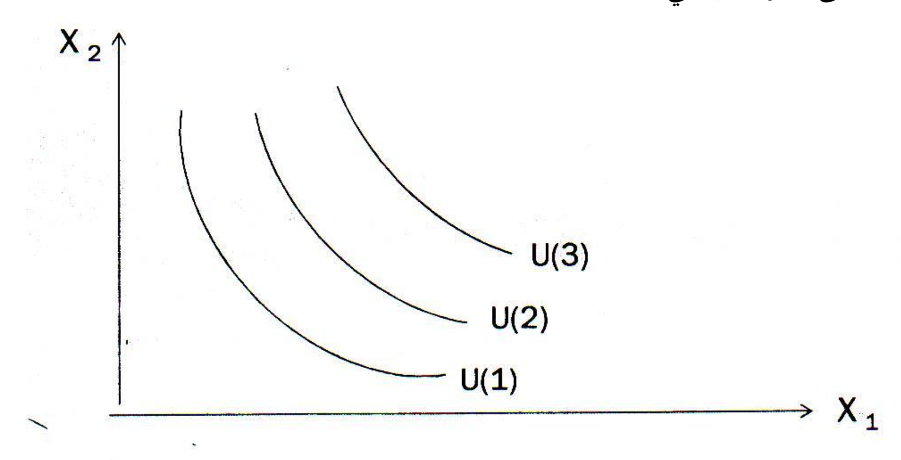
-3-

منحنيات المنفعة المتساوية أو منحنيات السواء

*تعريف منحنيات السواء: هي المحل الهندسي للمجموعات المختلفة من السلعتين التي تعطي للمستهلك ذات المستوى من الاشباع أو المنفعة فإذا كانت تمثل مستوى معين من المنفعة يمكن كتابة منحنى السواء كما يلي:

$$V = f(x1\ x2)$$

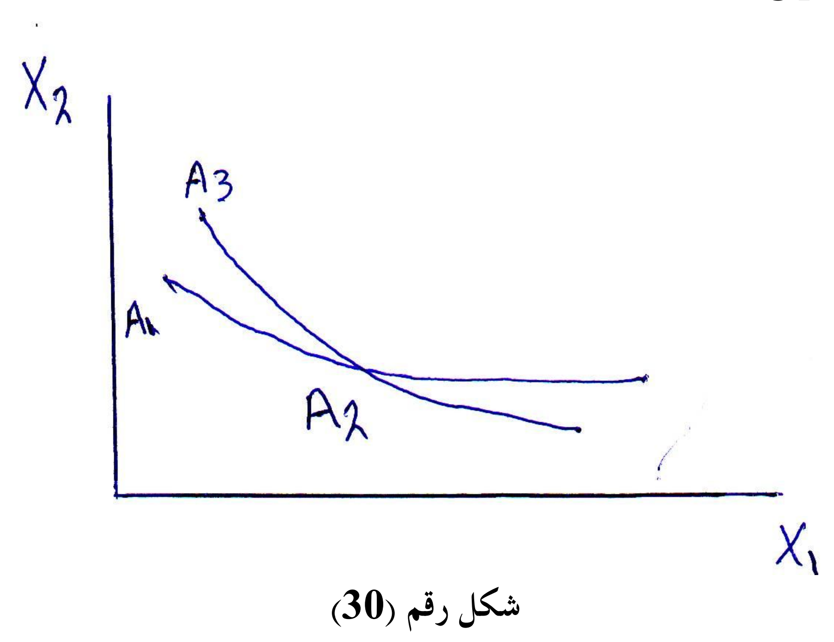
وإذا مثلنا مجموعة من منحنيات السواء بيانيا برسم x1 على المحور الأفقي x2 على المحور الرأسي.



شكل رقم (29)

ومن الرسم في الشكل رقم (29) يتضح مجموعة من منحنيات السواء بيانياً برسم الكميات X1 على المحور الافقي و X2 على المحور الرأسي، فمن الواضح ان مستوى الاشباع يزداد كلما ابتعدنا عن نقطة الاصل ، اذ ان معنى ذلك زيادة الاستهلاك من كل من السلعتين 1 و 2 . $U^{(1)} < U^{(2)} < U^{(3)}$.

من الرسم في الشكل رقم ( ) يتضح ان منحنيات السـواء لا يمكـن ان تتقاطع . فإذا أشرنا إلى المنافع المناظرة للنقط A_1 ، A_2، A_3 بالرموز U_1 ، U_2، U_3 وتم المقارنة بين A_1، A_3 وجد أن A_3 أفضل من A_1 وبالتـالي فـإن U1 <U3



شكل رقم (30)

من الشكل السابق نجد أن منحنيات السواء تقاطعت وهذا لا يحـدث في الواقع، والدليل على ذلك إذا أشرنا إلى المنافع المناظرة للـنقط A_1 ، A_2 ، A_3 والتي كل منهما على منحنى سواء بالرموز u_1 ، u_2 ، u_3 وقارنا بين A1 علـى منحنى السواء 1، A3 الموجودة على منحنى السواء 3 الأعلى من منحنى السواء 1 وجدنا أن A3 مفضله على A1 إذ أن المستهلك يحصل على كميات أكبر مـن السلعتين x_1 ، x_2 عند A_3 مما يحصل عليه عند A_1 وبالتالي فإن تفضيل المستهلك $u_3 > u_1$ وبما أن A_3 ، A_2 تتفقان على نفس منحنى السواء فإن $u_3 = u_2$ كما أن $u_1 = u_2$ لأن A_2 ، A_1 تتفقان على نفس منحنى السواء مما يعـني أن $n_3 = n_1$

وهذا يتعارض مع الافتراض أنهما منحنيين مختلفين وبالتالي لا يتقاطع منحنيان السواء.

-4-

معدل الاحلال الحدي:

Marginal Rate of Substitution

يبين ميل منحنى السواء معدل احلال السلعة 1 بالــسلعة 2 او احــلال السلعة 2 بالسلعة 1 حتى يظل المستهلك محتفظ بذات المستوى من المنفعة .

$$MRS = \frac{-dX_2}{dX_1} = \frac{f_1}{f_2}$$

ويتضح ان MRS مساوي للنسبة بين المنافع الحدية للسلعتين وبما ان كل من f_1, f_2 موجبة فان ميل منحنى السواء يكون سالباً $dX_2 / dX_1 < 0$ ويعني تقعر منحنى السواء الى اعلى ان القيمة المطلقة لميله تصغر بزيادة X_1 وحيث ان الميل سالب فان معدل تغيره يجب ان يكون موجبا .

أولاً: السلوك الأمثل للمستهلك : ان هدف المستهلك الرشيد هو تحقيق اكبر منفعة يمكن الحصول عليها في حدود ميزانية معينة وفي ظل اسعار السلع السائدة في السوق. وحيث أن الدخل ثابت وسعر السلع في سوق المنافسة الكاملة ثابت أيضا.

$$y - P_1 X_1 - P_2 X_2 = 0$$

حيث ان y: دخل المستهلك مع الافتراض انه ثابت.

P1, P2: سعر السلعتين X1, X2 ونفترض انه ثابت.

ثانياً: كيف يتوازن المستهلك طبقا لنظرية المنفعة الحدية : يتم ذلك من خلال الاسلوبين وهما طريقة لاجرانج (λ) وطريقة التعويض.

بالتالي نكون النموذج الرياضي الاتي:

نكون دالة المنفعة الكلية . $u = f(X_1, X_2)$

نكون دالة قيد الميزانية $y= P_1 X_1 + P_2 X_2$

$$y - P1\ X1 - P2\ X2 = 0$$

نكون الدالة الهدفية

V = دالة المنفعة الكلية + مضاعف لاجرانج (قيد الميزانية)

فيكون طريقة لاجرانج، تكون الصيغة على النحو التالي

$$V = f(X1, X2) + \lambda (y - P1X1 - P2\ X2)$$

1- الشرط الضروري : تعادل المشتقات الجزئية لكل من X1 ,X2 , λ بالصفر.

معنى ذلك أن معدل الإحلال الحدي بين السلعتين يجب أن يتعـــادل مـــع النسبة بين سعريهما.

$$dV/dX_1= V_1= f_1 - \lambda P_1 = 0$$
$$dV_2/dX_2= V_2 = f_2 - \lambda P_2 =0$$
$$dV_\lambda / d_\lambda = V_\lambda = y - P_1 X_1 - P_2 X_2 =0$$

بحل هذه المعادلات نحصل على كميات السلعتين X1, X2 التي تحقـــق للمستهلك اقصى اشباع.

2- الشرط الكافي: للتأكد من ان الكميات التي حصلنا عليها كميـــات توازنية تحقق اقصى اشباع ممكن .وذلك من خلال :

ويتبين هذه الشروط أن نسبة المنفعة الحدية لكل سلعة إلى سعرها يجب أن تساوى النسبة المشتركة أو بمعنى آخر أن المنفعة الحدية بكل وحدة نقدية منفعة يجب أن تتعادل في جميع مجالات الاتفاق

وبالتالي فالشرط الكافي للتوازن يعادل افتراض تناقص معدل الاحلال الحدي.

اما من خلال التعويض في دالة قيد الميزانية للتاكد من :

$$P_1 X_1 + P_2 X_2 = y$$

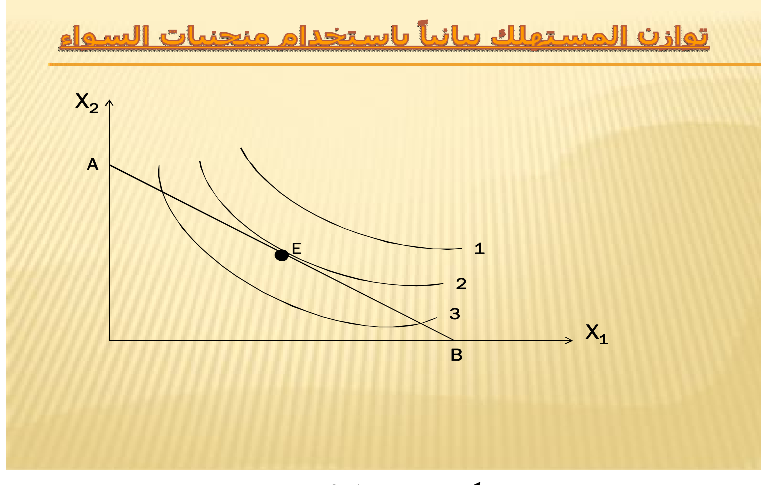
ويمكن كتابة الشرط الكافي للتوازن كما يلي:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{P_1}{P_2}$$

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & -P_1 \\ F_{21} & F_{22} & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

-5-

توازن المستهلك بيانياً باستخدام منحنيات السواء



شكل رقم (31)

من الشكل رقم (31) يتضح ان توازن المستهلك يتحقق عندما يمس خط الميزانية منحنى من منحنيات السواء (وهذا يعادل الشرط الـــلازم للتـــوازن) واذ

كانت منحنيات السواء مقعرة الى اعلى (الشرط الكافي لاعظم منفعة)، فان نقطــة التماس هذه تمثل نقطة اكبر اشباع يمكن تحقيقه في ظل الدخل المتاح للمستهلك.

مثال (1)

اذا علمت ان دالة المنفعة الكلية لمستهلك ما

u=2X1 X2

يخصص المستهلك للانفاق على السلعتين :

y=1000جنيه

P1= 20جنيه سعر السلعة الاولى

P2=10جنيه سعر السلعة الثانية

المطلوب : تحديد الكميات التوازنية التي تحقق توازن المستهلك ؟

الحل

نكون دالة المنفعة الكلية $u= 2X_1 X_2$

نكون دالة قيد الميزانية في صورتها الصفرية

$$y= P_1 X_1 + P_2 X_2$$
$$1000 = 20 X_1 + 10 X_2$$
$$1000 - 20 X_1 - 10 X_2 = 0$$

نكون الدالة الهدفية :

$$V = (2X_1 X_2) + \lambda (1000 - 20 X_1 - 10 X_2)$$

الشرط اللازم (الضروري): λ, X_2 , X_1

$$V_1 = 2X_2 - 20 \lambda =0 \quad (1)$$
$$V_2 = 2X_1 - 10 \lambda = 0 \quad (2)$$
$$V_\lambda = 1000 - 20 X_1 - 10X_2 = 0 \quad (3)$$

بقسمة المعادلة (1) على المعادلة (2)

$$\frac{2 X_2}{2 X_1} = \frac{20 \lambda}{10 \lambda}$$

$$\frac{X_2}{} = 2$$

$X_1 \quad 1$

$X_2 = 2 X_1 \qquad (4)$

وبالتعويض من المعادلة (4) في المعادلة (3).

$$1000 - 20 X_1 - 10 X_2 = 0$$

$$1000 - 20 X_1 - 10 (2X_1) =0$$

$$1000 - 20 X_1 - 20 X_1 = 0$$

$$1000 = 40 X_1$$

$$X_1 = 25 \qquad (5)$$

بالتعويض من المعادلة (5) في المعادلة (4)

$$X_2 = 2 X_1$$

$$X_2 = 2 x 25$$

$$X_2 = 50 \qquad (6)$$

الشرط الكافي :

للتأكد من ان الكميات التي حصلنا عليها من X2,X1 كميات توازنية

تحقق اشباع المستهلك وذلك من خلال التعويض في دالة قيد الميزانية :

$$P1\ X1 + P2\ X2 = y$$

$$20 \times 25 + 10 \times 50 = 1000$$

مثال 2:

إذا كانت $u = x1\ x2 \qquad P1 = 2 \qquad P2 = 5$

حدد الكميات من السلعتين التي تحقق أكبر اشباع ممكن للمستهلك

أولا: قيد الميزانية $y = P1\ x1 + P2\ X2$

$$100 = 2 x 1 + 5 x 2$$

التوازن بين يتحقق عندما تكون $u = x1\ x2$

تصل إلى قيمتها بشرط لتحقيق قيد الميزانية وبتطبيق طريقة لاجرانج تكون

الصفة

$$V = x1\ x2 + k\ (100 - 2x1 - 5x6$$

$$V1 = x2 - 2k = o$$

$$V2 = x1 - 5k = o$$

$$Vk = 100 - 2x1 - 5x2 = o$$

يحل المعادلات الثلاثة نجد أن

$$X_1 = 25 \quad , \quad X_2 = 10 \quad \lambda = 5$$

$$\begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{1\lambda} \\ V_{21} & V_{22} & V_{2\lambda} \\ V_{\lambda 1} & V_{\lambda 2} & V_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 10 + 10 = 20 > 0$$

وبالتالي يتحقق شرط التوازن لأن الناتج بالموجب.

الفصل السادس

التوازن الاقتصادي العام

-1-

نموذج فالراس

- هو نموذج مغلق بمعنى ان جميع متغيراته تتحدد آنياً بمعرفة الظروف المعطاه اى يعتمد على المتغيرات الداخلية وليس المتغيرات الخارجية. وهو نموذج يكون متسقاً مع وجود حالة التوازن.

ولابد أن نوضح أن مجرد القيام بعد المعادلات والمجاهيل لا يضمن وجود توازن له من الناحية الاقتصادية كما انه لا يضمن أن يكون الحل وحيداً وأخيراً، ولا يمكن بهذه الطريقة معرفة إذا كان هذا التوازن مستقر أم لا بمعنى أنه إذا أغرقت الأسواق عن مستواها التوازني بسبب أو آخر وجدت قوى تدفع هذه الأسواق إلى التوازن مرة أخرى.

- فهو نموذج يبحث في تحليل توازن جميع الاسواق في آن واحد ويتم دراسة التوازن العام للتبادل والانتاج **بفرض:**

1. وجود حالة من المنافسة الكاملة في الاسواق.
2. انه لا يمكن للفرد (سواء كان منتجاً أو مستهلكاً) ان يؤثر مباشرة على الاسعار.
3. تعتبر الاسعار معلومة وتحدد بظروف السوق وبتفاعل جميع قوى الطلب والعرض.
4. اذا انحرفت الاسواق عن مستواها التوازني لسبب او لاخر وجدت قوى تدفع هذه الاسواق الى التوازن مرة اخرى .

أولاً : نموذج التبادل البحت كما وصفه فالراس:

- يعني هذا النموذج بمشاكل التسعير وتخصيص الموارد في مجتمع يشمل عدد من الافراد يقومون بمبادلة واستهلاك عدد من "السلع" التي يتم مبادلتها

بفرض:.

- ان العرض ثابت.
- لكل فرد حرية الشراء والبيع بالاسعار السائدة في السوق.
- لكل فرد عدد من السلع يذهب بها إلى السوق لمبادلتها.
- تعتبر هذه المبادلات بمثابة عمليات مقايضة رغم وجود نقود.

1- رموز نموذج التبادل البحت لفالراس:

- $\mathbf{m}$: عدد أفراد المجتمع.
- $\mathbf{n}$: عدد السلع التي يتم مبادلتها.
- $\mathbf{X_{i\,j}}$: ذات الحروف الصغيرة الكمية المتوفرة لدي المستهلك $\mathbf{j}$ من السلعة $\mathbf{i}$ قبل عملية التبادل وهذه الكمية معلومة.
- $\mathbf{X_{i\,j}}$: الكمية من السلعة $\mathbf{i}$ التي يخرج بها المستهلك $\mathbf{j}$ من السوق بعد اتمام عملة المبادلة وهذه الكمية مجهولة .
- $\mathbf{P_i}$: السعر الذي يتم به تبادل السلعة $\mathbf{i}$.
- $\mathbf{X_i, X_i}$:$\mathbf{H}$ ذات الحروف الكبيرة تمثل الكميات المعروضة والمطلوبة من السلعة $\mathbf{i}$ في السوق على التوالي.

ويطلق فالراس وحدة القياس على السلعة.

2- شروط التوازن:

لكي يتحقق شروط التوازن لابد أن يتوافر مجموعتين من شروط التوازن:

1. تتعلق المجموعة الاولى: بسلوك الافراد عند قيامهم بالشراء والبيع.
2. تشير المجموعة الثانية الى ضرورة توازن قوى السوق.

أ–السلوك الفردي والطلب :

- يسعى كل فرد عند تحديد الكميات التي يشتريها او بيعها الى الحصول على أقصى منفعة ممكنة في حدود دخله وذلك بالاسعار التي يحددها السوق فنفترض أن لكل فرد من حقه ترتيبه كما يلي:

- دالة منفعة الفرد: $\mathbf{u_j = h_j (x_{1j}, x_{2j}, \ldots\ldots x_{nj})}$

$$i = 1, \ldots m$$
$$j = 1, \ldots m$$

- دخل المستهلك: $\mathbf{{}^{n}\Sigma_{i=1}\, p_i\, x_{ij}}$

حيث أن xij تمثل الكمية من السلعة

$$Uij = \frac{\partial\, uj}{\partial\, xij}$$

التي يدخل بها المستهلك j للسوق ويمكن التصرف فيها للحصول علـــى السلع التي يرغب بها وبالتالي فإن قيد الميزانية لهذا المستهلك

- قيد الميزانية : $\mathbf{\Sigma_i\, p_i\, x_{ij} = \Sigma_i\, p_i\, x_{ij}}$
- $\mathbf{\Sigma_i\, p_i\, (x_{ij} - x_{ij}) = 0}$

$$j = 1, \ldots m$$

شرط تحقيق الفرد لاقصى اشباع في ظل الدخل المتاح:

نعلم أن شرط تحقيق الفرد لأقصى اشباع في ظل الدخل المتاح نجملها فيما يلي:

- تساوي النسب بين المنافع الحدية للسلع المختلفة (أو معدلات الإحلال الحدية) النسب بين أسعار هذه السلع.
- تعادل المنافع الحدية للوحدة النقدية في اوجه الانفاق المختلفة وذلك بنسبة لكل مستهلك

$i = 2, \dots m \quad \mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u}_{Ij}$

$j = 1, \dots m \ \mathbf{P_i}$

- ويمكن اشتقاق دالة الطلب المستهلك على السلع المختلفة وبجمع دوال

الطلب على كل سلعة بالنسبة لجميع المستهلكين تصبح دالة طلب السوق:

$$i = 1, \dots m \quad \mathbf{X_i = {}^m\Sigma_{j=I} = D_i (P_1 ,\dots\dots,P_n)}$$

ب- توازن قوى السوق:

ويتلخص توازن قوى السوق في:

- ضرورة تساوي عرض كل سلعة مع الطلب عليها عند الاسعار التي

يحددها السوق.

وشرط التوازن

- $\mathbf{{}^m\Sigma_{j=1} (x_{ij} - x_{ij}) = 0}$

$j = 1, \dots m$

- حيث ان $\mathbf{Xi = \Sigma_j \; xi \; j}$: طلب السوق على السلعة.
- $\mathbf{Xi = \Sigma_j \; xi \; j}$: عرض السوق على السلعة.
- **جـــ- عدد المعدلات والمجاهيل وقانون فالراس:**
- قام فالراس بحل مشكلة زيادة عدد المعادلات عن عدد المجاهيل باثبات

انه يمكن اشتقاق احد شروط التوازن من الشروط الاخرى فقد اثبت فالراس ان احدى المعادلات ليست مستقلة عن باقي المعادلات وبالتالي فهى لا تتضمن معلومات جديدة ويمكن الاستغناء عنها فيصبح عدد المعادلات المستقلة (mn+n 1 –) فقط وتنص هذه الشروط على ضرورة تعادل الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة من كل سلعة فيتفاعل طلب الافراد مع الكميات المعروضة لتحديد اسعار السوق عند مستوى يتحقق تعادل طلبات الشراء مع عروض البيع.

يكفي لإثبات ذلك أن نوضح أن الاتفاق الكلي المحقق يعادل دائماً مجموع الدخول

$$\Sigma_i \ \Sigma_i P_i \ X_{ij} - \bar{X}_{ij} = 0$$

أو

$$\Sigma_i \ P_i \ X_i = \Sigma_i \ P_i \ \bar{X}_i$$

ولابد ملاحظة أن هذه الصياغة لنموذج فالراس لا تضمن الحصول علـــى أسعار توازنيية موجبة وأنه يمكن إعادة كتابة شروط التوازن لتلاف الحصول على أسعار سالبة بحيث يكون: أما بتعادل الطلب بالنسبة للسلعة مع الكمية المعروضـــة منها ففي هذه الحالة يكون لها سعر موجب أو أن عرض الكمية المتاحة من السلعة الطلب عليها فيكون السعر صفراً.

ثانياً: نموذج التبادل والانتاج

- لنفترض ان المجتمع يشمل(m) من الافراد يمتلكون (s) من عناصر الانتاج يبيعون خدماتها للمنتجين في مقابل حصولهم على الدخول التي ينفقونها في شراء (n) من السلع الاستهلاكية وفيما يلي فروض نموذج التبادل الإنتاج:

1- فروض نموذج التبادل الإنتاج:

- ان المنتجين يقومون بانتاج السلع الاستهلاكية باستخدام العوامل التي يمتكلها المستهلكون.
- عدم وجود منتجات مشتركة .
- ان كل وحدة من السلع تستلزم لانتاجها كمية ثابتة من كل عنصر من عناصر الانتاج.

- المعاملات الفنية للانتاج ثابتة.
- ثبات غلة الحجم.
- عدد المنشآت القائمة بالانتاج لا اهمية له .
- حجم المنشآت لا يؤثر على متوسط نفقة الانتاج.

2- رموز نموذج التبادل الإنتاج:

- $\mathbf{q_{k\,j}}$: الكمية المتوافرة لدي الفرد j من العنصر k.
- $\mathbf{Q_{k}}$: الكمية الكلية المتاحة من العنصر k.
- $\mathbf{Q_{k} = \Sigma_{j}\, q_{k\,j}}$: الكمية الثابتة.
- $\mathbf{a_{ki}}$: الكمية من العنصر k اللازمة لانتاج وحدة من السلعة i.
- $\mathbf{X_{i\,j}}$: الكمية التي يستهلكها الفرد j من السلعة.
- $\mathbf{X_i = \Sigma_j\, x_{i\,j}}$: الكمية الكلية المطلوبة من السلعة.

3- شروط التوازن لنموذج التبادل الإنتاج:

1-المجموعة الاولي: سلوك المستهلكين في السوق.

2-المجموعة الثانية: شروط انتاج السلع.

3-المجموعة الثالثة: ضرورة تعادل العرض مع الطلب في سوق عناصر الانتاج.

أ- السلوك الفردي والطلب:

- يسعى كل فرد في حالة التبادل البحث الى شراء الكميات من السلع i التي تحقق له اقصى منفعة ممكنة حدود دخله yj حيث:

$$\mathbf{y_j = {}^{s}\Sigma_{k=1}\, P_k\, q_{k\,j}} \qquad j = 1, \dots m$$

- بالتالي فقيد الميزانية بالنسبة للفرد j:

$$\mathbf{\Sigma_{i}\, p_i\, x_{I\,j} = \Sigma_k\, P_k\, q_{k\,j}} \qquad j = 1, \dots m$$

- لبلوغ الفرد اقصى اشباع ممكن هو تعادل معدلات الاحلال الحدية بين السلع المختلفة والاسعار النسبية لهذه السلع:

$$u_{ij} = \frac{u_{ij}}{P_i}$$

يمكن اشتقاق طلب الفرد j على السلعة i كدالة في كل من اسعار السلع pi واسعار العوامل P_k وبتجميع هذه الطلبات الفردية نحصل على الكمية المطلوبة من السلعة i كدالة في جميع الاسعار P_k, p_i نحصل على:

- $$X_i = Di\,(p_I, \ldots\ldots p_n;\; P_1, \ldots\ldots\ldots P_s)$$

ب- توازن انتاج السلع:

- بافتراض حرية دخول مجال الانتاج لابد ان يساوي سعر كل سلعة تكلفة انتاجها فاذا كانت a_{ki} كمية العنصر k اللازمة لانتاج وحدة من السلعة i يجب ان تحقق الشروط الفنية التالية وعددها n:

- $$P_i = {}^{s}\Sigma_{k=I}\, a_{k\,i}\, P_k$$

- تشير هذه الشروط الى ان التكلفة الكلية المتوسطة تساوي سعر السلعة وهذه ليست الا مجموعة من شروط توزان انتاج السلع في الاجل الطويل بفرض عدم وجود سلع وسيطة .

- **جـــ- التوازن في سوق العوامل :**

يتمثل شرط التوازن في سوق العوامل في:

- ضرورة استخدام عناصر الانتاج المعروضة استخداما كاملاً بحيث لا يبقي منها فائض غير مستخدم .اي تعادل المعروض Q_k من خدمة العنصر k مع المطلوب منها وهو $\Sigma_i\, a_{k\,i}\, X_i$.

- $$Q_k = {}^{n}\Sigma_{i=I}\, a_{k\,i}\, X_i$$
  $$K = 1, \ldots s$$

- **د- عدد المعادلات والمجاهيل وقانون فالراس من جديد:**

في هذا النموذج الكميات المطلوبة من السلع X_i $(n-1)$ من أسعار السلع P_i وقد افترضنا أن $P_i = 1$ ولدينا s من أسعار خدمات عناصر الإنتاج مجموع المتغيرات $2n + s - 1$ ويمكن تحديدها باستخدام معادلات النموذج وعددها n من المعادلات أي أن $2n + s$ معادلة وبالتالي في هذه الحالة يكون عدد المعادلات وعدد المتغيرات بواحد.

- في هذه الحالة ايضاً يمكن اثبات ان احدى المعادلات غير مستقلة عن المعادلات الاخرى وبالتالي فهي لا تتضمن معلومات جديدة ويمكن الاستغناء عنها ولاثبات ذلك يكفي ان نبين ان الانفاق الكلي المحقق يعادل مجموع الدخول المتحصلة.

$$^{n}\Sigma_{i=I}\ p_i\ X_i = {}^{s}\Sigma_{\ k=I}\ P_{\ k}\ Q_{\ k}$$
$$X_I \equiv {}^{s}\ \Sigma_{k=I}\ P_{\ k}\ Q_{\ k} - {}^{n}\Sigma_{\ i=2}\ p_i\ X_i$$

- هذا هو قانون فالراس حيث يتحقق قيد الميزانية بالنسبة لكل فرد ويشير الى ضرورة تغطية الايردات في فترة معينة مجموع الانفاق في ذات الفترة.

نلخص من ذلك أن بالنسبة لكل فرد j، $(n-I)$ من الشروط وقيد الميزانية يمكن استخدامها لتحديد طلبات هذا الفرد $x_{i\ j}$ على السلع المختلفة وعددها n بالنسبة لكل فرد j و تضمن الشروط ان تسود السوق اسعار تنافسية وتعطي هذه الشروط اسعار السلع الاستهلاكية $p_{\ i}$ بدلالة اسعار خدمات عوامل الانتاج P_K التي تتحدد بدورها بتفاعل الطلب على عوامل الانتاج مع عرضها الثابت في اسواق عناصر الانتاج والشروط تسمح بتحديد هذه الاسعار كما تبين ان الطلب خدمات عناصر الانتاج طلب مشتق من الطلب على السلع الاستهلاكية $X_{\ i}$.

ثالثاً: **<u>ملاحظات نموذج الانتاج والتبادل</u>**: ليشمل حالات توافر امكانيات الاحلال الفني وتأثر عرض عوامل الانتاج بأسعارها وخضوع الانتاج لدوال انتاج

مستمرة بدلاً من افتراض ثبات المعاملات الفنية للانتاج وفيما يلي اشارة سريعة لكل حالة من هذه الحالات على التوالي:

1. افتراضنا ثبات المعاملات الفنية للانتاج $a_{k\,i}$ ولكن يمكن التغاضي عن هذا الافتراض واعتبار ان $a_{k\,i}$ ليست ثابتة وانما تتوقف على الاسلوب الفني المتبع في الانتاج الذي يعتمد بدوره على اسعار عناصر الانتاج ففي هذه الحالة يصبح لدينا **ns** معادلة لتحديد قيم $a_{k\,i}$ لا تؤثر اسعار السلع المنتجة على قيم المعاملات الفنية كما لا يؤثر عليها حجم الطلب حيث افتراضنا خضوع الانتاج لثبات الغلة مع الحجم كما افتراضنا عدم وجود استخدمات وسيطة للسلع.

2. افترضنا ثبات عرض خدمات عناصر الانتاج ولكن يمكن توسيع نطاق النموذج بحيث يشمل الحالة التي يتوقف فيها عرض خدمات عناصر الانتاج على الاسعار.

3. لنفرض ان انتاج السلعة **i** يتم وفقا لدالة الانتاج $Xi=f_i(q_{I\,i},\ldots\ldots q_{s\,i})$ حيث ان $q_{k\,i}$ كمية العنصر **k** المستعملة في انتاج السلعة فيصبح لدينا عدد **ns**من المتغيرات الاضافية $q_{k\,i}$ يجب تحديد قيمتها التوازنية وبافتراض ان الدوال f_i مستمرة وبذلك يصبح لدنيا **ns** من هذه الشروط لتحديد تخصيص الموارد بين السلع المختلفة اي تحديد قيم $q_{k\,i}$ بحيث يتحقق التوازن في سوق عوامل الانتاج اي بحيث يعادل عرض عوامل الانتاج الطلب عليها .

- $Q_k = {}^{n}\Sigma_{i=I}\, q_{k\,i}$

-2-

التوازن العام في نموذج التبادل الإنتاج

أولاً: التوازن العام يتوقف على اربعة انوا ع من المعلمات:

1. **معلمات الفنية:** تعتمد على دراسات هندسية لتحديد الاسلوب الفني للانتاج .

2. **معلمات فسيولوجية ونفسية**: وتتمثل في دوال المنفعة u_j.

3. **معلمات طبيعية**: وتتمثل في الكميات المتاحة من الموارد المختلفة Q_k.

4. **معلمات التنظيم القانوني**: الذي يحدد شكل الملكية وبالتالي يحدد توزيع ملكية عناصر الانتاج بين الافراد .

- هذا النموذج يبين ان في دراسة اقتصادية تفاعل كل من الرغبات والموارد المتاحة والاسلوب الفني للانتاج والنظم القانونية لتحديد الاطار الذي يعمل فيه الباحث الاقتصادي.

ثانياً: دور الدولة في احداث التوازن

- يفترض النموذج وجود المنافسة الكاملة كما انه يفترض عدم وجود آثار خارجية لنشاط المستهلكين والمنتجين .بمعنى ان اي فرد سواء كان منتجاً او مستهلكاً، عند ممارسة نشاطه لا يعوق او يساعد نشاط الآخرين وبالتالي فلا مجال للتدخل في هذه الظروف .ولكن قلما توافرت هذه الظروف عمليا مما يستلزم تدخل الدولة لتنظيم المنافسة والحد من القوى الاحتكارية من ناحية و لتنظيم نشاط الافراد من ناحية اخرى حتى لا يتعارض نشاطهم كمنتجين او مستهلكين مع مصالح الجماعة .

يسمح نموذج التوازن العام كل من الكميات المطلوبة والمعروضة من كل ساحة في السوق والاستهلاك الفردي منها. كما أنه يسمح بتحديد توزيع الموارد المتاحة على الأنشطة الإنتاجية المختلفة، وأخيراً يبين كل من الدخول النقدية النسبية والأسعار النسبية للسلع والخدمات عناصر الإنتاج.

وقد بينا أن هذا النموذج له حل توازني، وذلك بعد المعادلات والـــتغيرات وإثبات أن عدد المعادلات المستقلة يساوي عدد المتغيرات.

ولكن يجدر الإشارة هنا إلى أن هذا الإجراء لا يضمن وجود حل مقبول اقتصادياً (أي أن قيم جميع المجاهيل في هذا الحل غير سالبة)، كما أنه لا يضمن أن هذا الحل وحيد. وقد قام عدد من الاقتصاديين – باستخدام رياضيات متقدمة – بإثبات وجود مثل هذا الحل كما أثبتوا أن هذا الحل وحيد – وأول من أثبت وجود حل توازني وحيد هو ابرهام والد وذلك سنة Abraham Wald 1935.

نلاحظ أن التوازن العام يتوقف على أربعة أنواع من المعلمات:

1-معلمات فنية، تعتمد على دراسات هندسية لتحديد الأسلوب الفني للإنتاج وهذه المعلمات هي a_{ki} أو دوال الإنتاج F_i.

2-معلمات تعتمد على عوامل فسيولوجية ونفسية وتتمثل في معاملات دوال المنفعة u_j.

3-معلمات تحددها لنا الطبيعة وتتمثل في الكميات المتاحة من الموارد المختلفة Q_k.

4-معلمات تتوقف على التنظيم القانوني في المجتمع الذي يحدد شكل الملكية وبالتالي يحدد توزيع ملكية عناصر الإنتاج بين الأفراد q_{kj}.

وهذا النموذج يبين أن في كل دراسة اقتصادية تتفاعل كل من الرغبات والموارد المتاحة والأسلوب الفني للإنتاج والنظم القانونية لتحديد الإطار الذي يعمل فيه الباحث الاقتصادي.

وأخيراً، يتضح من النموذج أن كل وحدة منخذة للقرارات في سعيها لتحقيق مصالحها الخاصة تحقق أيضاً الصالح العام. فقد افترضنا أن كل منشأة تعمل على تحقيق أقصى ربح وكل مستهلك يسعى إلى بلوغ أقصى أشباع ممكن في حدود دخله وبينا أنه ينتج عن تفاعل سلوك الأفراد مع بعضهم البعض أسعار توازنية تعادل نفقة الإنتاج المتوسطة للسلع المختلفة كما بينا أن هذه النفقة أقل نفقة

للإنتاج، وأن الكميات المنتجة عند هذه الأسعار تطابق رغبات المستهلكين كمـا عبروا عنها بنمط انفاقهم لدخولهم. وبالتالي يمكننا القول أن حل نموذج التـوازن الاقتصادي العام يحقق كفاءة كل من الإنتاج والاستهلاك، فلا يمكن إذن في ظـل هذه الظروف تعديل تخصيص الموارد بين السلع المختلفة أو تبديل تكوين الإنتاج أو إعادة توزيع السلع بين المستهلكين بحيث تزيد المنفعة التي يحققها فرد مـا بـدون تخفيض الأشباع الذي يحصل عليه الأفراد الآخرون. وبالتالي فحل نموذج التـوازن العام يتسم بالأمثلية والكفاءة، فلا داعي إذن لتدخل الحكومة لتبديل أو تعديل هذا الحل. ولكن هناك ظروف تدعو إلى تدخل الحكومة في ظل هذا النموذج.

قد يعترض البعض على نمط توزيع الدخول فينادون بتدخل الدولة لتعديله. وهذا القرار سياسي واجتماعي لا يمكن تبريره على أساس اقتصادي بحت إذ أننا لا نستطيع – من الوجهة الاقتصادية – المقارنة بين درجات الاشباع التي يحصل عليها الأفراد وبالتالي لا نستطيع تأييد نمط من أنماط توزيع الدخل أو الإعتراض عليه.

يفترض النموذج وجود المنافسة الكاملة، كما أنه يفترض عدم وجود آثار خارجية لنشاط المستهلكين والمنتجين بمعنى أن أي فرد – سواء كـان منتجـاً أو مستهلكاً – عند ممارسة نشاطه لايعوق أو يساعد نشاط الآخرين.

وبالتالي فلا مجال للتدخل في هذه الظروف. ولكن قلما تـوافرت هـذه الظروف عملياً، مما يستلزم تدخل الدولة لتنظيم المنافـسة والحـد مـن القـوى الإحتكارية من ناحية والتنظيم نشاط الأفراد من ناحية أخرى حـتى لا يتعـارض نشاطهم كمنتجين أو كمستهلكين مع مصالح الجماعة.


نموذج فالراس
نموذج مغلق يبحث في تحليل توازن الاسواق آنياً بفرض وجود حالة من المنافسة الكاملة
Xi ≡ sΣk=l Pk Qk - nΣi=2 pi Xi
نموذج التبادل البحت
يعني بمشاكل التسعير وتخصيص الموارد
في مجتمع يشمل عدد من الافراد
mبفرض ان العرض ثابت والبيع والشراء
بالاسعار السائدة في السوق
يجب توافر مجموعتين من شروط التوازن
نموذج التبادل والانتاج
يفترض ان المجتمع يشمل m من الافراد
يمتلكون ومن عناصر الانتاج ويبيعون خدماتها
للمنتجين في مقابل حصولهم على الدخول
التي ينفقونها في شراء n من السلع اما
شروط التوازن :
السلوك الفردى والطلب
يسعى كل فرد الى الحصول
على اقصى منفعة ممكنة
في حدود دخله والاسعار
المحددة في السوق
دالة المنفعة:
ui = hi (x1i ,x2i ,…xni)
nΣi=1 pi xij دخل المستهلك
قيد الميزانية
Σ i pi (xi j - xi j) = 0
شرط التوازن ui j/Pi=u1 j
دالة طلب المستهلك
Xi = mΣj=l = Di (P1 ,……,Pn)
توازن قوى السوق
ضرورة تساوى عرض
كل سلعة مع الطلب
عليها عند الاسعار
التي يحددها السوق
طلب السوق
Xi = Σj xij
عرض السوق
Xi = Σj xij
شرط توازن قوى
السوق
mΣj=1 (xij - xij) =0
السلوك الفردى
والطلب
يسعى كل فرد الى
شراء الكميات من السلع
التي تحقق اقصى
منفعة في حدود دخله
yj=sΣk=1 Pk qkj
قيد الميزانية
Σ1 pi xij = Σk Pk qkj
شرط التوازن
uij/pi=u1j
دالة الطلب
Xi =Di (p1 ,..pn ; P1 , Ps)
توازن انتاج
السلع
يفرض لحرية
دخول مجال
الانتاج لابد ان
يساوي سعر
كل سلعة
تكلفة انتاجها
Pi = sΣk=1 ak i Pk
التوازن فى
سوق العوامل
ضرورة استخدام
عناصر الانتاج
المعروضة
استخدما كاملا
وشرط التوازن
تعادل المعروض
من خدمة العنصر
مع المطلوب منها
Qk = nΣi=1 aki Xi

الفصل السابع

تحديد مستوى الدخل القومي

النموذج الكيتري المبسط

مقدمة:

تهدف النظرية الكيترية تفسير مستوى الإنتاج في فترات بطالة كل من العمل ورأس المال ولابد أن توضح أن النظرية التقليدية الكلاسيكية لم تهتم بالبطالة حيث أنها اعتبرتها ظاهرة مؤقتة يعالجها آليا سير النظام الاقتصادي، ولذلك اهتمت النظرية الكلاسيكية بمشاكل التوازن والنمو في الأجل الطويل أكثر من اهتمامها بالتقليل في الأجل القصير، ولكن مع الأزمة الاقتصادية الكبيرة في الثلاثينيات، والتي اجتازت خلالها أغلب الدول الصناعية والتي من أثارها ظهور البطالة في معظم دول العالم لفترات طويلة، وعندئذ بدأ الاقتصاديون في الاهتمام بتحليل محددات مستوى الإنتاج في أي فترة زمنية.

وقد قام العالم الاقتصادي الكبير كيتر في عام 1936 في لندن في إصدار الكتب الاقتصادية العالمية the general theory of employment interest and money

ويتناول في الدراسة النموذج الكيتري البسيط والذي يفترض النموذج ما يلي:

1-عدم وجود علاقات مع العالم الخارجي.

2-عدم تأثير القطاع الحكومي على النشاط الاقتصادي.

3-تتضمن هذه الصورة المبسطة عدة منشآت تقوم بانتاج الناتج القومي الصافي واستخدام جزء منه في الاستثمار اما الجزء الآخر من الناتج فيستهلكه القطاع العائلي.

-1-

النموذج المبسط لكيتر

يرى كيتر أن قرارات الاستثمار مستقلة إلى حد بعيد وأن تغير مستوى الإنتاج يؤثر على قررات الاستثمار ويمكن اغفار ذلك في الأجل القصير وتم التركيز الاهتمام على أن الاستثمار سلوك مستقل وليس تابع ومجمل نظرية كيتر أن قررات الاستثمار تؤدي مباشرة إلى نمو الإنتاج ويعثر من ذلك النمو المتزايد للإنتاج إلى زيادة دخول إضافية (أجورواريات) في هذه القطاعات ويؤدي هذه الدخول الجديدة إلى زيادة الانفاق الاستهلاكي الاخاص وبالتالي زيادة الإنتاج في الصناعات المنتجة للسلع الاستهلاكية ويتبع ذلك توابع دخول إضافية جديدة واتفاق جديد وزيادة في الإنتاج جديدة وتعثر في نظرية كبير ما يلي

يقوم النموذج على الافتراضات التالية :

- ثبات الاسعار رغم تغير مستوى الانتاج مما يعني اننا نفترض وجود عوامل انتاجية معطلة .
- عدم وجود علاقات مع العالم الخارجي اي ان الاقتصاد المغلق.
- عدم وجود قطاع حكومي.

أولاً: يمكن تلخيص العلاقات التي تفسر مستوى الانتاج فيما يلي:

- ان الاستثمار مستقل.
- ينقسم الانتاج الى قطاعين : انتاج السلع الاستهلاكية وانتاج السلع الاستثمارية.
- يتوقف انتاج السلع الاستهلاكية على الدخل المتاح للانفاق.
- يتوقف الدخل المتاح للانفاق على مستوى الانتاج.

ثانياً: الرموزالمستخدمة في النموذج المبسط لكيتر:

- **C**: الاستهلاك

- **X**: الناتج القومي الصافي.
- **Y**: الدخل القومي النقدي الصافي.
- **A**: الاستهلاك الصافي.
- **c**: الميل الحدى للاستهلاك.
- **I**: الاستثمار الصافي التلقائي.
- **P**: سعر الانتاج.
- **X**: حجم الانتاج القومي الصافي الذي يضمن استخدام عوامل الانتاج استخداما كاملاً.

ولابد لنا أن نعرف أن هناك وحدات مقاسه بوحدات مثل A ، I x فإن هناك وحدات مقاسة بوحدات نقدية ونحصل عليها بضرب حجم الناتج في السعر الثابت P

$$Y = Px$$

ثالثاً: **يمكن التعبير عن العلاقات من خلال المعادلات التالية** :

- $X = C + I$
- $C = f(Y / P)$
- $Y = PX$
- $X - f(X) = I$
- تبين هذه المعادلة مستوى الناتج X ومستوى الدخل Y الذي يقترن بكل مستوى للاستثمار.

وحيث f دالة تحدد العلاقة بين الدخل الحقيقي المتاح للاتفاق والاستهلاك وهذا النموذج رغم بساطته يعطي تفسيرا لمستوى الناتج القومي أو الدخل والذي يقترن بكل مستوى على الاستثمار.

-2-

اختلاف نموذج كينز عن نموذج التوازن العام

1. يتجاهل كينز مكونات الانتاج القومي ويعتبره مكونا من السلعة غير محددة يمكن استهلاكها كما يمكن استثمارها.

2. يتجاهل كينز مستلزمات الانتاج وقيودها فيتوقف مستوى الانتاج على مقدار الطلب الكلي، وبالتالي يمكن ان تمتص العملية الانتاجية مقادير من المستلزمات اقل من العرض المتاح تاركة فائضاً معطلاً.

3. يفترض النموذج ان القطاع العائلي يدخر جزءاً من دخله وتقوم المنشآت بالاستثمار وبذلك يتحقق نمو الانتاج ولكن النموذج لا يبين المجرى الزمني للانتاج بل يقتصر على تحديد مستواه التوازني.

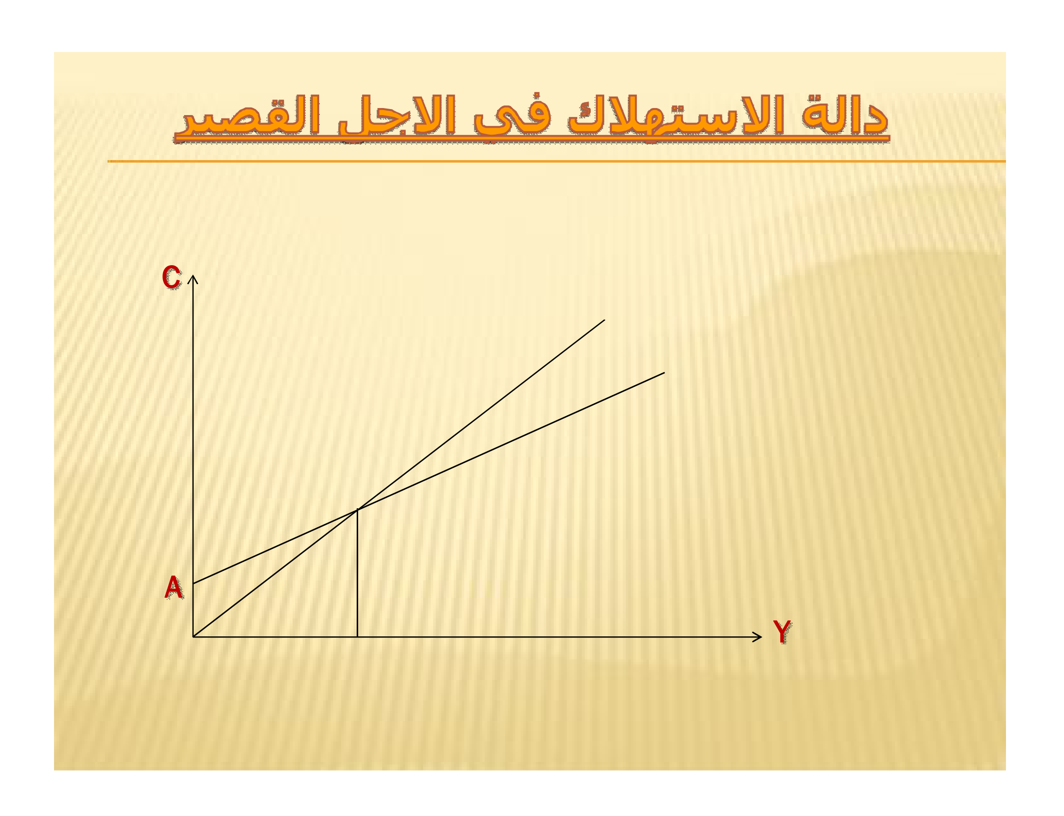
-3-

دالة الاستهلاك

نموذج كينز نموذج للأجل القصير إذ أنه لا يمكن اعتبار الاستثمار الصافي موجبا وفي الوقت ذاته افتراض أن رأس المال ثابت إلا في الفترة القصيرة وكذلك لا يمكن تحديد المستوى التوازني للناتج إلا في الأجل القصير وفي الفترة القصيرة يمكن افتراض أن دالة الاستهلاك في الاجل القصير $C = A + c\ (\ Y\ /\ P)$

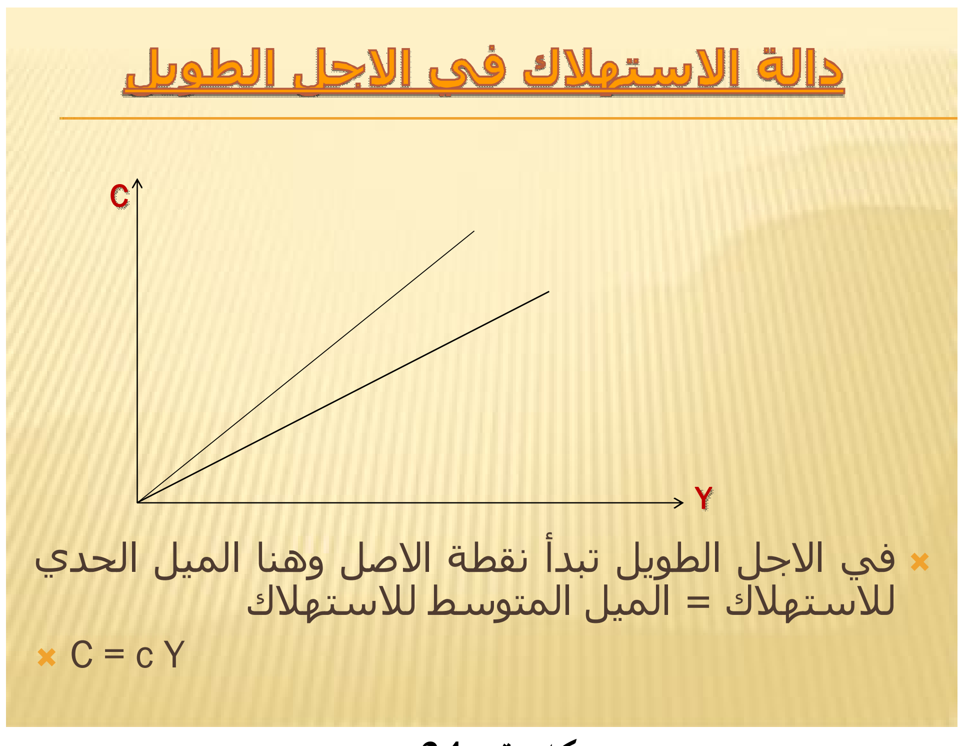
أو $C = A + c\ X$

- $\mathbf{C = A_{c} + c\ Y_{t}}$
- **C**: الاستهلاك القومي.
- **A**: الاستهلاك الثابت.
- **c**: الميل الحدي للاستهلاك ثابت مهما تغير الدخل $\mathbf{dc\ /\ d\ Y}$.
- $\mathbf{Y_{t}}$: الدخل المتاح (الضرائب – الدخل)($Y - t$).
- **C/Y**: الميل المتوسط للاستهلاك يتناقص مع زيادة الدخل .



شكل رقم (33)

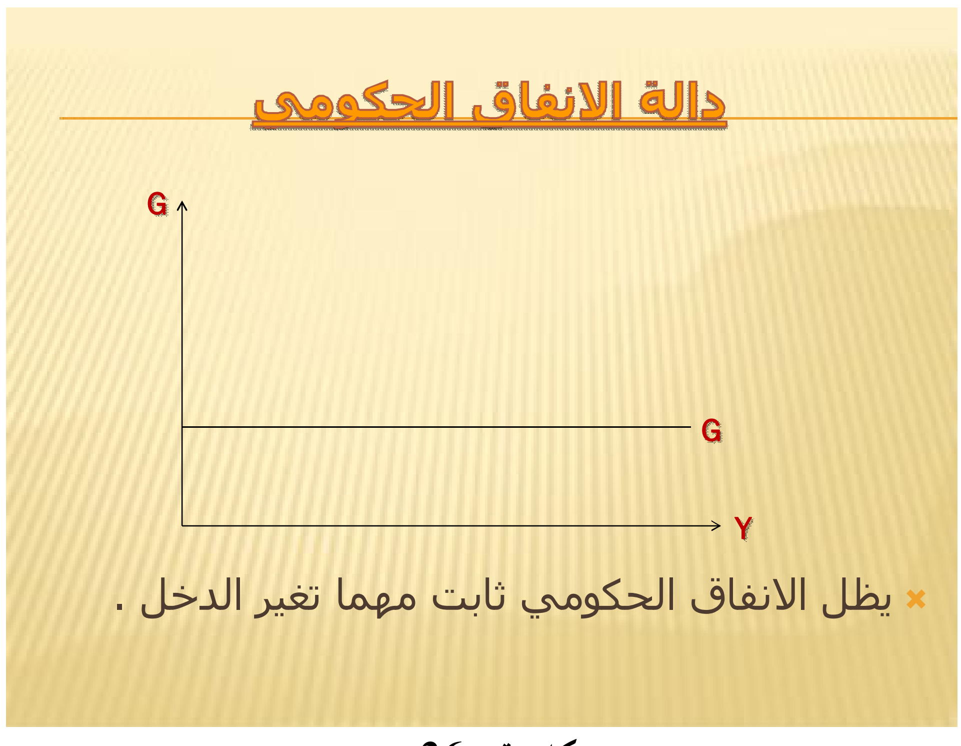
ويوضح شكل رقم (33) أن دالة الاستهلاك والأجل القصير تبـــدأ من النقطة A عكس دالة الاستهلاك في الأجل الطويل التي تبدأ من نقطة الأصل



شكل رقم (34)



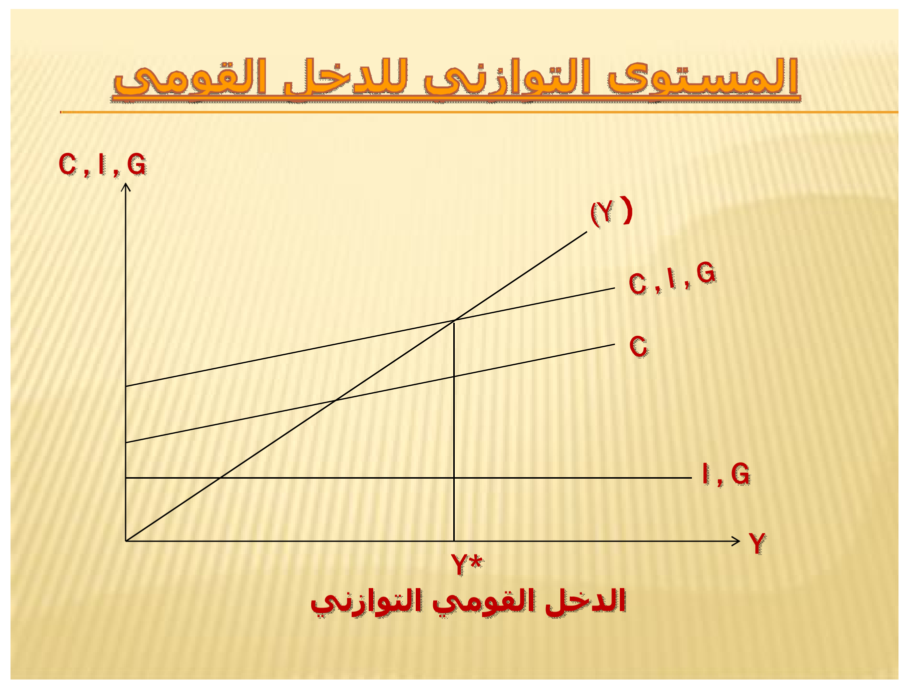
شكل رقم (35)



شكل رقم (36)

شرط التوازن لتحديد مستوى الدخل القومي

- العرض الكلي = الطلب الكلي
- C + I + G = Y
- الدخل (الناتج) القومي = الاستهلاك + الاستثمار + الانفاق الحكومي



شكل رقم (37)

-4-

التوازن ومضاعف الاستثمار

يتطلب التوازن أن يتساوى مجموع كل من الطلب على سلع الاستهلاك والطلب على سلع الاستثمار مع الناتج القومي الصافي وبالتالي لا يتراكم المخزون أو يتناقص بشكل غير مرغوب فيه أي أن شرط التوازن

$$X = C + I$$

$$X = C\,x + A + I$$

أي أن الناتج لا يتعدى المستوى النقدي ويتحقق الاستخدام الكامل للموارد المتاحة في ظل ذلك بتحدد الناتج بالطلب ويساوي مجموع الاستهلاك التلقائي والاستثمار الصافي مقسوما على الميل الحدي للادخار $S = I - C$ ويسمى مقلوب الميل الحدي للادخار ⊥/ي أو العامل ⊥/(⊥ - c) بمضاعف الاستثمار.

ومضاعف الاستثمار: معدل التغير في الدخل القومي نتيجة لتغير الاستثمار.

$$K = \Delta Y / \Delta I$$

$$K = Y_2 - Y_1 / I_2 - I_1$$

مضاعف الاستثمار = الميل الحدي للاستهلاك = الميل الحدي للادخار.

$$K = 1 / 1 - c$$

مثال (1)

اذا اعطيت البيانات الاتية : $C = 100 + 0.8 Y$

المطلوب :

1. تحديد قيمة مضاعف الاستثمار .
2. أثر زيادة الاستثمار ب 10 مليون .

الحل

1. $K = 1 / 1 - c$

$$K = 1 / 1 - 0.8$$

$$K = 1 / 0.2 = 5$$

اي ان كل 1 جنيه يتم استثماره يترتب عليه زيادة في الدخل القومي بمقدار 5 جنيه.

2. $K = \Delta Y / \Delta I$

$$5 = \Delta Y / 10$$

$$\Delta Y = 5 \times 10 = 50 \text{ million}$$

يترتب على زيادة الاستثمار ب 10 مليون زيادة الدخل القومي ب 50 مليون .

مثال (2)

اذا كانت دالة الاستهلاك $C = 20 + 0.75 Y$

كان شرط التوازن $Y = C + I + G$

حيث ان I الاستثمار = 20 مليون .

G الانفاق الحكومي = 20 مليون .

المطلوب :

1. حساب قيمة الدخل القومي التوازني .
2. حساب قيمة مضاعف الاستثمار .
3. اثر زيادة الاستثمار بمقدار 5 مليون على الدخل القومي .

الحل

1. $\mathbf{Y = C + I + G}$

$$Y = 20 + 0.75\ Y + 20 + 20$$
$$Y - 0.75\ Y = 60$$
$$0.25\ Y = 60$$
$$Y = 60/0.25$$
$$Y = 240 \text{ million.}$$

2. $\mathbf{K = 1 / 1 - c}$

$$K = 1/\ 1 - 0.75$$
$$K = 1/\ 0.25\ = 4$$

اي ان كل 1 جنيه يتم استثماره يترتب عليه زيادة في الدخل القومي بمقدار 4 جنيه.

3. $K = d\ Y / d\ I$

$$4 = d\ Y / 5$$
$$d\ Y = 4 \times 5$$
$$dY = 20 \text{ million}$$

يترتب على زيادة الاستثمار ب 5 مليون زيادة الدخل القومي ب 20 مليون .

-5-

ادخال القطاع الحكومي

أولاً: مضاعف الانفاق الحكومي : معدل التغير في الدخل القومي نتيجة لتغير الانفاق الحكومي. وتكون اشارته موجبة لانه اضافة حيث يترتب على زيادة الدخل القومي. $K = \Delta Y / \Delta G$

$$K = 1 / 1 - c$$

ثانياً مضاعف الضريبة : معدل التغير في الدخل القومي نتيجة لتغير الضرائب .وتكون اشارته سالبة لانه تسرب حيث يترتب على زيادة الضرائب انخفاض الدخل القومي.

$$K t = \Delta Y / \Delta t$$

$$K t = - c / 1 - c$$

ثالثاً: مضاعف الميزانية المتوازنة : مجموع مضاعف الانفاق الحكومي + مضاعف الضريبة . لذلك مضاعف الضريبة (الثابتة) يقل عن مضاعف الانفاق الحكومي .بمقدار واحد صحيح مع وضع اشارة سالبة لمضاعف الضريبة .

$$1 / 1 - c \quad + \; - c / 1 - c$$

$$= 1 - c / 1 - c \; = 1$$

مثال (3)

اذا علمت ان دالة الاستهلاك $C = 100 + 0.8 \, Y_t$

حيث ان الدخل = 10مليون $Y_t = Y - t$

شرط التوازن : $Y = C + I + G$

الاستثمار : 50 مليون .

G الانفاق الحكومي : 20 مليون .

المطلوب :

1. حساب قيمة الدخل القومي التوازني .

2. حساب قيمة مضاعف الانفاق الحكومي ومضاعف الضريبة .
3. اثر زيادة الانفاق الحكومي 5 مليون على الدخل القومي .
4. اثر زيادة كل من الانفاق الحكومي والضرائب معاً كل منها ب 5 مليون على الدخل القومي.
5. علق على النتائج .

الحل

1. $\mathbf{C = 100 + 0.8\ Y\ t}$

$$C = 100 + 0.8\ (Y - t)$$
$$C = 100 + 0.8\ (\ Y - 10\ )$$
$$C = 100 + 0.8\ Y - 8$$

$C = 92 + 0.8\ Y$ يتم تحديد الدخل القومي من شرط التوازن

$$Y = C + I + G$$
$$Y = 92 + 0.8\ Y + 50 + 20$$
$$Y - 0.8\ Y = 162$$
$$0.2\ Y = 162$$
$$Y = 162 / 0.2$$
$$Y = 810 \text{ million.}$$

2. $\mathbf{K = 1 / 1 - c}$

$$K = 1 / 1 - 0.8$$
$$K = 1/ 0.2$$

$K= 5$ مضاعف الانفاق الحكومي

$$Kt = - c / 1 - c$$
$$Kt = - 0.8 / 1 - 0.8$$
$$Kt = - 0.8 / 0.2$$

$Kt = - 4$ مضاعف الضريبة

3. $\mathbf{K = dY / d\ G}$

$$K = dY / 5$$
$$dY= 5 \times 5 = 25 \text{ million}$$

يترتب على زيادة الانفاق الحكومي ب 5 مليون زيادة الدخل القومي ب 25 مليون .

اثر زيادة الانفاق الحكومي ب 5 مليون يزيد الدخل القومي ب 25 مليون

$Kt = dy / dt$ اثر زيادة الضرائب ب 5 مليون

$-4 = dy / +5$

$dy = -4 \times +5 = -20$ million

ذلك يعني ان زيادة الضرائب تعمل على خفض الدخل القومي ب 2مليون

وبالتالي تكون المحصلة النهائية هي زيادة الدخل القومي ب 5 مليون (أثر زيادة الانفاق الحكومي – اثر زيادة الضرائب) (25 – 20 = 5)

5. النتائج

المحصلة النهائية هي زيادة الدخل القومي وليس ثباته على الرغم من ان زيادة الانفاق الحكومي بنفس مقدار زيادة الضرائب وذلك لان مضاعف الانفاق الحكومي اكبر من مضاعف الضرائب .

الفصل الثامن

نمو الدخل القومي

نموذج هارود ودومار

نعلم أن افتراض كيتز أن الاستثمار الصافي موجب وأن حجم رأس المال ثابت، وأنه يقصر تحليله على الفترة القصيرة، وهذه المشكلة جعلت هارود ودومار يفكرون ماذا لو أتسع الأفق الزمني لنموذج كيتز ليشمل فترة زمنية أطول فلابد من افتراض أن الاستثمار الصافي يؤدي إلى زيادة رأس المال التي تسمح بدورها بنمو الناتج، وبالتالي يمكن تحديد مستوى أكبر للناتج خلال فترة زمنية أكبر، وهذا ما توصل إليه علماء الاقتصاد هارود ودومار والذين اهتموا بعملية النمو الاقتصادي.

أولاً: خصائص نموذج هارود ودومار

1. عدم وجود مجال للاحلال بين عناصر الانتاج المختلفة.
2. جمود معامل رأس المال للعمل .
3. جمود معامل رأس المال للناتج .
4. عدم استقرار مجرى نمو الدخل التوازني .بمعنى اذا انحرف الدخل القومي عن مجراه التوازني فانه لن يعود تلقائياً الى هذا المجرى.
5. فرق النموذج بين معدل النمو الطبيعي ومعدل النمو المرغوب فيه.

معدل النمو الطبيعي	معدل النمو المرغوب فيه
هو معدل نمو الدخل الذي يضمن استخدام الموارد المتاحة استخداماً كاملاً	يتوقف على معدل الادخار القومي ومعامل رأس المال للناتج يضمن استثمار جميع المدخرات
يساوي معدل نمو القوة العاملة	يتميز بتعادل الاستثمار المقدر مع المدخرات المقدرة

اذا معدل النمو المرغوب فيه أكبر من معدل النمو الطبيعي واجه الاقتـــصاد القومي تضخماً مستمراً	اذا كان معدل النمو الطبيعي أكبر من معدل النمو المرغـــوب فيـــه عـــانى الاقتصاد القومي من كساد مزمن .

ثانياً: محددات معدل نمو الدخل المرغوب فيه

- يعتمد هذا المعدل على تفاعل قوتين : المضاعف و المعجل .

1- يوضح المعجل العلاقة بين الاستثمار وتغير الدخل القومي ويستند الى ان زيادة الناتج بمعدل معين تحتاج لزيادة رأس المال (اي تحتاج الي الاستثمار) ويحدد مقدار هذه الزيادة في رأس المال (أو كمية الاستثمار) المعامل الحدي لرأس المال للناتج .

2- يساوي المضاعف مقلوب الميل للادخار او معدل الادخار القومي اي يوضح معدل التغير في الدخل القومي الناتج عن تغير الاستثمار .

- يبين هذا النموذج ان معدل نمو الدخل القومي المرغوب فيه يتوقف على **معامل رأس المال للناتج** ، وعلى **معدل الادخار** (بافتراض ان معدل الادخار يساوي معدل الاستثمار اي ان جميع المدخرات تستثمر)

ثالثاً: رموز نموذج هارود ودومار للنمو طويل الأجل:

- **Y**: الدخل القومي (يساوي الناتج القومي الصافي)
- **g**: معدل النمو النسبي للناتج القومي الصافي.
- **C**: الاستهلاك القومي.
- **S**: الادخار القومي .
- **I**: الاستثمار الصافي .
- **K**: رأس المال القومي .

وتشير هذه الرموز الي متغيرات النموذج ما عدا معدل النمو **g** وهي تقاس بوحدات عينية او باسعار ثابتة.

رابعاً: معلمات النموذج :

- V: معامل رأس المال للناتج ويعبر عن النسبة بين الاستثمار الصافي وزيادة الناتج القومي الصافي.
- c: الميل للاستهلاك.
- s:الميل للادخار او معدل الادخار القومي $(I - c)$.
- t: الزمن ونفترض ان الزمن مستمر .

خامساً: علاقات النموذج :

1. يعرف الاستثمار على انه معدل تغير رأس المال بالنسبة للزمن t اي ان

$$I = d K / d t$$

2. اذا افتراضنا ان معدل تغير الدخل القومي يتناسب مع الاستثمار الصافي و ان معامل التناسب هو V وتسمى بعلاقة التعجيل :

$$I = v \; d Y / d t \qquad \text{معادلة } 1$$

شرط التوازن : $Y = C + I$

بم.

3.

ا ان الادخار القومي S يعرف على انه الفرق بين الدخل و الاستهلاك .

$$S = Y - C$$

شرط التوازن : $S = I$ معادلة 2

ب

4.

افتراض ان دالة الاستهلاك هي : $C = c\, Y$

تكون دالة الادخار: $S = (I - c)\, Y = s\, Y$ معادلة 3

بالتعويض من معادلة 1،2،3 نجد ان :

$$s\, Y = v \; d Y / d t$$

ومنها : $d Y = \; s \; Y / \; v$

أي ان الدخل القومي ينمو بمعدل يتناسب مع قيمة الدخل ومعامل التناسب هو s/v يمكن كتابة المعادلة في الصورة التالية:

$$dY/dt - gY = 0$$

حيث $g = s / v$

<u>سادساً</u>: <u>تفسير حل النموذج</u>

أ- **$g<0$** : ففي هذه الحالة يؤول Y الى الصفر ولا تحدث هذه الحالة الا اذا كانت $c > I$ فعندئذ تصبح $I - c < 0$ وبالتالي $g<0$ وتشير هذه الحالة الى ان المجتمع يستهلك رأس ماله بالتدريج وبالتالي تتناقص طاقته الانتاجية حتى تتلاشى .

ب- **$g=0$**: هذه الحالة ركود حيث يظل الدخل ثابتاً عند مستواه وتحدث هذه الظاهرة عندما $c=I$ اي عندما لا يدخر المجتمع شيئاً ويستهلك كل ما ينتج وبالتالي لا تتغير طاقته الانتاجية زيادة او نقصاً .

ج- **$g>0$**: هذا هو النمط الشائع حيث ينمو الناتج القومي Y بمعدل منتظم

المراجع

1-د. هناء خيرالدين، الأسعار وتخصيص الموارد.

2-د. هناء خيرالدين، محاضرات في الاقتصاد الرياضي.

3-د. محمد رضا العدلي، الاقتصاد الرياضي.

4-د. عبد المنعم راضي، الاقتصاد الرياضي.

5-د. عبد الرحمن يسري، الاقتصاد الرياضي.

6-أ. هالة رجب، مذكرة في الاقتصاد القياسي والرياضي.

7- L. Walras: Elements d`Economic Politique Pure, Lausanne 1874, English Translation by W. Jaffe, 1953.

8- Helen Makower and W.J. Baumol: "the Analogy. Between Producer and Consumer Equilibrium analysis", Economica, 1950.

9- E.O. Heady and J.L. Dillon. Agricultural Production Function, Lowa state university press. Ames, Lowa, 1961.

10- G.C Archibald and R.G. Lipsey

An Introduction to a Mathematical Treatment of Economics. Weidenfeld & Nicolson, London. 1967.

Keynes, J.M. the General Theory of -11
.Employment interest and Money, London, 1936

الفهرس العام

.